الدكتور فوزي دنان

المورد في الرياضيات

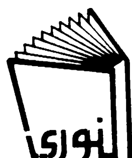


الدكتور فوزي دنان

المورد في الرياضيات

مؤسسة النوري للطباعة والنشر والتوزيع

مُؤَسَّسَةُ ٱلنُّورِي لِلطِّبَاعَةِ وَٱلنَّشرِ وَٱلتَّوزِيع
دمشق - فيكتوريا - بناء فندق آسيا - ص ب ١٧٦



مقدمة

الحاجة إلى الرياضيات أمر لا جدال فيه ، وتبرز هذه الحاجة كلما حاول الإنسان أن يحلّ مشكلة ما صَغُرت أم عَظُمت ، كما أن كلٍ إنسان مهما تعددت مشاربه واتجاهاته واختصاصاته بحاجة إلى الرياضيات ، كلٌ بمقدار ، ابتداءً من الحساب البسيط إلى المعادلات المعقدة ، سواء كان ذلك بقصد التطبيق المباشر أو متابعة الدراسة في موضوع ما .

ولكن كيف يمكن لأحدنا أن يحصل على المعلومة الرياضية التي يريد سواء كانت قانوناً أو معادلة أو نظرية بسرعة وبسهولة وبدقة ووضوح ؟؟

لقد حاولت في (المورد في الرياضيات) أن أمكّن القارىء من الحصول على ما يريد بسرعة وبدقة وقد كان هذا هو الهدف الرئيسي لهذا الكتاب الذي يعتبر الأول من نوعه في الوطن العربي .

فقد أوردت صيغ القوانين والمعادلات والنظريات مرتبة بصورة مختصرة وواضحة ، إذ يمكن للقارىء أن يعرف موقعها باستخدام **الفهرس العام** والموضوع الذي تندرج تحته ، أو باستخدام **المسرد العربي** حيث تم وضع رقم الصفحة التي وردت فيها الكلمة المطلوبة . **ويغطي الكتاب جميع مواضيع الرياضيات** ، ابتداءً من الحساب البسيط حتى النظريات الرياضية المعقدة ، بما فيها مواضيع الرياضيات المعاصرة .

وتسهيلاً للقراء ولمستخدمي الرموز العربية وخاصة طلبة المرحلة الثانوية ، **فقد تم تخصيص القسم الثاني من الكتاب لأهم القوانين الضرورية مستخدماً الرموز**

العربية ، وفي هذا القسم بعض الإضافات على ما ورد في القسم الأول ، الأمر الذي يجعل القسمين متكاملين .

ويتضمن الكتاب عدداً من الجداول الرياضية المفيدة أثناء استخدام الكتاب .

كما يتضمن ملحقاً لمعاني المصطلحات العربية باللغة الانكليزية ، إضافة إلى ثبتِ الرموز المستخدمة .

ولا بد أن أشير هنا إلى انني اعتمدت بشكل رئيسي على كتاب :

1. R.S.Burington, Handbook of mathematical tables and formulas, 1973.

إضافة إلى أهم المراجع التالية :

2. A.Bouvier, M. George, Dictionnaire des mathématiques, 1979.

3. E.Kreyszig, Advanced engineering mathematics, 1983.

4. H.J.Bartsch, Handbook of mathematical formulas, 1974.

5. M.R.Speigel, Mathematical handbook, 1968.

6. I.N.Sneddon, Encyclopaedic dictionary of mathematics for engineers and applied scientists, 1976.

7. جميع كتب الرياضيات المؤلفة لطلاب المرحلة الثانوية

وبالرغم من الجهد الكبير الذي بذلته أثناء إعداد الكتاب ومتابعة طباعته لتفادي أي خطأ ، فإنني سأقدم كل الشكر والامتنان لكل من يقدم ملاحظاته سعياً لوضع كتاب أقرب إلى الكمال بين يدي القارىء العربي .

وإذا حاولت أن أبيّن الشرائح التي يمكن أن تستفيد من هذا الكتاب فلن أبالغ إذا قلت إن جميع الشرائح العاملة في المجالات المختلفة من المختصين وغير المختصين في الرياضيات والعلوم الهندسية وغيرها ، ستجد فيه شيئاً ما مفيداً لها .

ولا يسعني أخيراً إلا أن أشكر كل من ساهم في إخراج (المورد في الرياضيات) إلى النور .

وآمل أخيراً أن أكون قد ساهمت بوضع لبنة في تقدم مسيرتنا العلمية والله الموفق .

د. فوزي دنان

الأحرف اليونانية

التسمية	الحرف اليوناني	
	الصغير	الكبير
ألفا	α	A
بيتا	β	B
غاما	γ	Γ
دلتا	δ	Δ
إبسيلون	ϵ	E
زيتا	ζ	Z
إيتا	η	H
ثيتا	θ	Θ
إيوتا	ι	I
كاپا	κ	K
لامدا	λ	Λ
ميو	μ	M

التسمية	الحرف اليوناني	
	الصغير	الكبير
نيو	ν	N
كْسي	ξ	Ξ
أوميكرون	o	O
پاي	π	Π
رُو	ρ	P
سيغما	σ	Σ
تاو	τ	T
أوبسيلون	υ	Υ
فاي	ϕ	Φ
خاي	χ	X
بْساي	ψ	Ψ
أوميغا	ω	Ω

ثبت الرموز

المعنى ، التسمية	الرمز
الجبر	
القيمة المطلقة لـ a	$\|a\|$
n عاملي	$n!$
صفر عاملي = 1	$0!$
أمثال الحد $a^{n-2}\,b^2$ في مفكوك ثنائي الحد	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
الجذر من المرتبة n للعدد الموجب a	$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
الجذر من المرتبة q للعدد a^p ، $a > 0$	$\sqrt[q]{a^p} = a^{p/q}$
$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$	$\sum_{i=1}^{n} a_i$
المجموعات	
ينتمي إلى	$\in$
لا ينتمي إلى	$\notin$
يحتوي تماماً	$\supset$
محتوى في	$\subseteq$
محتوى تماماً في	$\subset$
ليس محتوى تماماً	$\not\subset$
اجتماع	$\cup$
تقاطع	$\cap$

A' أو $C_U A$	متمم A بالنسبة لـ U
$\emptyset$	المجموعة الخالية ، المجموعة الصفرية
$=$	يساوي
$\neq$	لا يساوي
$\approx$ أو $\leftrightarrow$	يكافىء
$\not\approx$	لا يكافىء
$\{\ \}$	قوسان لتمثيل المجموعة
$\{x\}$	مجموعة العناصر x
: أو $\mid$	بحيث ، التي من أجلها
$\{x \mid p$ تتمتع بالخاصة x $\}$	مجموعة العناصر المحققة الخاصة p
$\{x \mid \quad \}$	مجموعة العناصر المحققة للخاصة
$[a,b]$	المجموعة $a \leqslant x \leqslant b$
$[a,b)$	المجموعة $a \leqslant x < b$
$(a,b]$	المجموعة $a < x \leqslant b$
(a,b)	المجموعة $a < x < b$ الزوج المرتب (a , b)
$\langle x, y \rangle$	الزوج المرتب x , y أو الجداء الداخلي للعنصرين x و y
$A \times B$	الجداء الديكارتي للمجموعتين A و B

$\cup A_r$ أو $\bigcup_{r=1}^{n} A_r = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

$\cap A_r$ أو $\bigcap_{r=1}^{n} A_r = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$

المنطق

$\wedge$, &	و ، العطف
$\vee$	الإباحة
$\veebar$	التخيير
$\rightarrow$ أو $\Rightarrow$	يقتضي ، الاقتضاء
$\leftrightarrow$ أو $\Leftrightarrow$	يكافىء ، التكافؤ
$\sim$ أو	لا ، النفي
$\forall$	مهما يكن ، مسوّر شامل
$\forall_x$	من أجل جميع x
$\exists$	يوجد على الأقل عنصر ، مسوّر الوجود
$\exists_x$	يوجد على الأقل x ، من أجل x ما
$\exists \mid$	يوجد عنصر واحد
$E!v$	يوجد عنصر وحيد v ، مسوّر الوحدانية

العلاقات

R	مرتبط بعلاقة R مع
$\not R$ أو R'	لا يرتبط بالعلاقة R مع
$=$ أو $\approx$	مطابق لـ ، مكافىء لـ
R^{-1}	العلاقة المعاكسة لـ R
$x\, R\, y$	x يرتبط مع y بالعلاقة R
$x \not R\, y$	x لا يرتبط مع y بالعلاقة R
$\leftrightarrow$	تقابل واحداً ـ لواحد
$F : S \rightarrow T$	

التوابع

$f(x)$	قيمة التابع f عند x
f^{-1}	التابع المعاكس لـ f
$f \circ g$	تركيب التابعين g و f
$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = E$	التابع المطابق
$f : (x, y)$	التابع f المعرف بالزوج المرتب

الاحتمالات

$P(E)$	احتمال الحادث E
$P(E \cap F)$ أو $P(E \wedge F)$	احتمال E و F معاً
$P(E \mid F)$	احتمال E علماً بأن F قد وقع
$P(E \cup F)$ أو $P(E \vee F)$	احتمال e أو F أو كلاهما

البنى الجبرية

$\circ, \odot, \oplus, \otimes, \star, \cup, \cap, +, -$	رموز العمليات
z أو 0	الصفر
u أو 1	الواحد
a^{-1}	معاكس A

الفهرس

القسم الاول

القسم الثاني

القسم الثالث (الجداول)

1. الجبر

1. القوانين الأساسية

(a) القانون التبديلي . $ab = ba$ $\qquad a + b = b + a$

(b) القانون التجميعي . $a + (b + c) = (a + b) + c,$

$$a(bc) = (ab)c$$

(c) القانون التوزيعي . $a(b + c) = ab + ac$

2. قوانين الأسس

$$a^x a^y = a^{x+y} \qquad (ab)^x = a^x b^x \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0) \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^{x/y} = \sqrt[y]{a^x} \qquad a^{1/y} = \sqrt[y]{a}$$

3. العمليات على الصفر

$$a - a = 0 \qquad a \times 0 = 0 \times a = 0$$

(التقسيم على صفر غير مُعَرّف) عندما $a \neq 0$, $\frac{0}{a} = 0, 0^a = 0, a^0 = 1$

4. الأعداد العقدية (المُرَكَّبة)

العدد العقدي هو عدد من الشكل $a + ib$ حيث a و b حقيقيان .

$$i = \sqrt{-1},\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i, \text{etc.}$$

$a + bi = c + di$ إذا فقط وفقط $a = c,\ b = d$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

5. قوانين اللوغاريتم

إذا كانت M , N , b أعداداً موجبة و $b \neq 1$ فإن

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N \qquad \log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

$$\log_b M^p = p \log_b M \qquad \log_b \sqrt[q]{M} = \frac{1}{q} \log_b M$$

$$\log_b \frac{1}{M} = -\log_b M \qquad \log_b b = 1 \qquad \log_b 1 = 0$$

قاعدة تغيير الأساس في اللوغاريتم $(c \neq 1)$

$$\log_b M = \log_c M \ \log_b c = \frac{\log_c M}{\log_c b}$$

6. نظرية ثنائي الحد (n عدد موجب صحيح)

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

حيث $n! = \underline{|n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n$

7. المتطابقات والعوامل

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$$
$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - b^{n-1})$$

من أجل n صحيح زوجي

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$$

من أجل n صحيح فردي

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

8. النسبة والتناسب

إذا كان $a : b = c : d$ أو $a / b = c / d$ فإن

$$ad = bc \ , \ a / c = b / d$$

إذا كان

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \cdots = k,$$

فإن

$$k = \frac{a + c + e + \cdots}{b + d + f + \cdots} = \frac{pa + qc + re + \cdots}{pb + qd + rf + \cdots}$$

9. ثابت التناسب أو التغير k

إذا تغيرت y طِردياً بالنسبة لـ x أو تناسبت y مع x فإن

$$y = kx$$

إذا تغيرت y عكسياً بالنسبة لـ x أو تناسبت عكسياً مع x نكتب

$$y = \frac{k}{x}$$

إذا تغيرت y متناسبة مع x و z نكتب

$$y = kxz$$

إذا تغيرت y طردياً مع x عكسياً مع z

$$y = \frac{kx}{z}$$

10. المتتالية الحسابية

$$a \qquad a + d \qquad a + 2d \qquad a + 3d$$

إذا كان الحد الأول هو a ، والفرق بين كل حدين هو d ، و n عدد الحدود و ℓ الحد الأخير و s مجموع n حداً فإن

$$l = a + (n - 1)d \qquad s = \frac{n}{2}(a + l)$$

المتوسط الحسابي لـ a و b هو $(a + b) / 2$.

11. المتتالية الهندسية

$$a, ar, ar^2, ar^3 \ \ldots$$

إذا كان a هو الحد الأول ، r النسبة بين الحد وسابقه ، n عدد الحدود ، ℓ الحد الأخير ، S_n مجموع n حداً :

$$l = ar^{n-1} \qquad S_n = a\frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{rl - a}{r - 1}$$

إذا كان $r^2 < 1$ فإن S_n تنتهي إلى S_∞ عندما $n \to \infty$.

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

المتوسط الهندسي لـ a و b هو $\sqrt{ab}$.

إذا كان $r^2 \geqslant 1$ فإن $S_\infty = \infty$.

12. المتتالية التوافقية

هي متتالية أعداد تشكل مقلوباتها متتالية حسابية

$$\frac{1}{a} \qquad \frac{1}{a+d} \qquad \frac{1}{a+2d}$$

المتوسط التوافقي لعددين a و b هو $2ab/(a+b)$

13. التباديل

إن كل ترتيب لمجموعة عناصر أو لجزءٍ منها يسمى **تبديلاً** . إن عدد تباديل n عنصراً مختلفاً مأخوذة r في كل مرة هو

$$P(n,r) = {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(1)$

فإذا سمحنا بتكرار العنصر فإن عدد التباديل يصبح

$$n^r$$

14. التوافقات . التوافق

هو كل مجموعة يمكن تشكيلها من مجموعة من العناصر أو من مجموعة جزئية منها دون النظر إلى الترتيب . إن عدد التوافقات التي يمكن تشكيلها من n عنصراً مختلفاً مأخوذة r في كل مرة هو

$$C(n,r) = {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

أما عدد التوافقات التي يمكن تشكيلها من n عنصراً مختلفاً مأخوذة r في كل مرة مع السماح بتكرار العناصر فهو

$$\binom{n+r-1}{r}$$

15. الاحتمال

هو عدد يقع بين الصفر والواحد يشير إلى امكانية وقوع حدث ما ، حيث يشير الصفر إلى استحالة وقوع الحدث ، بينما يشير الواحد إلى أن وقوع الحدث مؤكد ، وهكذا فإن احتمال حصولنا على الرقم 7 عند رمي حجر نرد نظامي يساوي الصفر بينما احتمال حصولنا على عدد بين الواحد والستة يساوي الواحد . من أجل تفاصيل حول هذا الموضوع أنظر قسم الاحتمالات .

16. نظرية الباقي (انظر 30)

إذا قسّمنا كثير الحدود $f(x)$ على $x-a$ فإن الباقي هو $f(a)$. وينتج أنه إذا كان a جذراً للمعادلة $f(x)=0$ فإن $f(x)$ يقبل القسمة على $x - a$.

17. المعيِّنات (المحدِّدات) (انظر الفصل 13)

نعرّف المعين D من المرتبة n

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

بالمجموع

$$\Sigma\ (\pm)\ a_{1i} a_{2j} a_{3k} \cdots a_{nl}$$

لـ $n!$ حداً ويتم أخذ إشارة + إذا كان عدد الانعكاسات (للأعداد $(1,2,3,\ldots,n$ في المتتالية الموافقة $i,j,k,\ldots,\ell$ زوجياً ، ونأخذ إشارة − إذا كان عدد الانعكاسات فردياً .

ملاحظة . الانعكاس في تبديل ما للأعداد $1,3,2,\ldots,n$ هو تبديل موضعي عددين متجاورين بحيث يكون الرقم الأصغر بعد الرقم الأكبر ، وهكذا فالتبديل $1,3,2,4$ يحتوي على انعكاس واحد . ولكي نعد عدد الإنعكاسات في تبديل ما نعد الأعداد التي تلي كل عدد من عناصر التبديل والتي هي أصغر منه (أي تخالف الترتيب الطبيعي) . ونجد أن عدد الانعكاسات في التبديل $5,2,3,1,6,4$ هو 7 إذ أن عدد الأرقام التي تلي 5 وأصغر منه هو 4 وعدد الأرقام الواقعة بعد 2 وأصغر منه هو 1 وبمتابعة العمل نجد :

عدد الانعكاسات $= 1 + 0 + 1 + 1 + 4$

المتمم الجبري A_{ij} للعنصر a_{ij} هو جداء $(-1)^{i+j}$ بالمعين الناتج من حذف السطر i والعمود j من المعين D .

نظريات متعلقة بالمعين .

(a) لا تتغير قيمة المعين إذا بادلنا بين موقعي السطر i والعمود i فيه .

(b) إذا بادلنا بين موقعي السطرين (أو العمودين) p و q في D فإن قيمة D تصبح $(-1)^{\alpha}D$ حيث $\alpha = |p - q|$.

(c) إذا تساوى سطران (أو عمودان) في D كان $D = 0$.

(d) إذا ضربنا كل عنصر من عناصر سطر (أو عمود) في D بعدد m ، تصبح قيمة المعين mD .

(e) إذا ضربنا كل عنصر من عناصر سطر (أو عمود) في D بعدد m وأضفناه إلى سطر (أو عمود) آخر لما تغيرت قيمة المعين .

(f) $$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},\ j = 1, 2, \ldots, n$$

(g) $$0 = a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \cdots + a_{nk}A_{nj},\ j \neq k$$

(h) يكون لجملة المعادلات

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = c_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

حلاً وحيداً إذا كان $D \neq 0$ ، ويعطى الحل بالعلاقات

$$Dx_1 = C_1 \qquad Dx_2 = C_2, \ldots \qquad Dx_n = C_n$$

حيث C_k هو المعين الذي يؤول اليه D بعد وضع $c_1, \quad c_2, \ldots, c_n$ بدلاً من العمود k على الترتيب .

مثال 1.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

مثال 2. أوجد قيم x_1, x_2, x_3 المحققة للمعادلات

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= -6 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 12 \end{aligned}$$

من (h)17 نجد

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 12 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{8}{8} = 1; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 12 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-16}{8} = -2;$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}} = 3$$

18. القيمة المطلقة

القيمة المطلقة لعدد حقيقي x هي المقدار الموجب المقابل لـ x والذي نرمز له بـ $|x|$ ونعرّفه كما يلي :

$|x| = x$ (إذا كان x موجباً أو صفراً)

$|x| = -x$ (إذا كان x سالباً)

19. نظريات القيمة المطلقة

(a) إذا كان x عدداً حقيقياً فإن

$$-|x| \leqq x \leqq |x|$$

(b) لدينا من أجل أي عدد حقيقي $|x| = \sqrt{x^2}$.

(c) إذا كان a و b عددين حقيقيين فإن

$$|ab| = |a| \cdot |b| \quad ; \quad |a/b| = |a|/|b| \ (b \neq 0)$$

(d) إذا كان $a > 0$ فإن

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$
$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ أو } x < -a$$

20. الأعداد الموجبة والأعداد السالبة والصفر

تتكون مجموعة الأعداد الحقيقة عادة من ثلاث مجموعات : مجموعة الأعداد الموجبة ، مجموعة الأعداد السالبة ، المجموعة $\{0\}$ وهي تلك التي تحتوي على عنصر واحد هو الصفر . فإذا أخذنا عنصراً a من مجموعة الأعداد الحقيقية فهو إما أن يكون موجباً ونرمز له بالشكل $a > 0$ ونقرأ «a أكبر من الصفر» ، أو أن يكون سالباً ونرمز له بالشكل $a < 0$ ونقرأ «a أصغر من الصفر» ، أو أن يكون $a = 0$.

21. المتراجحات (المتباينات)

ليكن a و b عددين حقيقيين عندئذٍ نكتب $a < b$ ونقرأ «a أصغر من b» إذا وفقط إذا كان العدد $b - a$ موجباً . كما نكتب $a > b$ ونقرأ «a أكبر من b» إذا وفقط إذا كان العدد $b - a$ سالباً . نسمي كلاً من العبارتين $a > b$ و $c > d$ متراجحة (متباينة) .

22. نظريات متعلّقة بالمتراجحات

(a) **قانون التعدي** : إذا كانت a,b,c أعداداً حقيقية وكان $a < b$ و $b < c$ فإن $a < c$.

(b) لتكن a,b,c أعداداً حقيقية فإن $a < b$ إذا وفقط إذا كان $a + c < b + c$.

(c) لتكن a,b,c,d أعداداً حقيقية . فإذا كان $a < b$ و $c < d$ فإن $a + c < b + d$.

(d) لتكن a,b,c أعداداً حقيقية فإن :

(i) $a < b$ إذا وفقط إذا $ac < bc$ عندما يكون c موجباً .

(ii) $a < b$ إذا وفقط إذا $ac>bc$ عندما يكون c سالباً .

(e) إذا كان للعددين الحقيقيين a و b الإشارة نفسها (موجبان معاً أو سالبان معاً) وكان $a < b$ فإن $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(f) إذا كان العددان الحقيقيان a,b موجبين وكان $a < b$ فإن $a^2 < b^2$.

(g) إذا كان العددان الحقيقيان a,b سالبين وكان $a < b$ فإن $a^2 > b^2$.

23. قانون التثليث

إذا كان a و b عددين حقيقيين فإن واحدة وفقط واحدة من العبارات التالية تكون صحيحة :

$$a < b \ , \ a = b \ , \ a > b$$

فإذا استبعدنا واحدة من العبارات الثلاث فإن العددين a و b يخضعان «لقانون التثنية» ويحققان واحدة فقط من العلاقتين الباقيتين . وهكذا نجد :

(a) إذا استبعدنا $a = b$ فإن $a < b$ أو $a > b$ ونرمز لذلك بـ $a \neq b$ ونقرأ «a لا يساوي b» .

(b) إذا استبعدنا $a > b$ فإن $a < b$ أو $a = b$ ونرمز لذلك بـ $a \leqq b$ ونقرأ «a أصغر أو يساوي b» . نستخدم أحياناً الرمز $a \ngtr b$ ونقرأ «a ليس أكبر من b» .

(c) إذا استبعدنا $a < b$ فإن $a > b$ أو $a = b$ ونرمز لذلك بـ $a \geqq b$ ونقرأ «a أصغر أو يساوي b» . نستخدم أحياناً الرمز $a \nless b$ ونقرأ «a ليس أصغر من b» .

24. المتراجحات الأساسية .

المتراجحة المثلثية

$$|a_1| - |a_2| \leqq | a_1 + a_2 | \leqq |a_1| + |a_2|$$

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

من أجل أي مجموعة أعداد حقيقية $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

متراجحة كوشي - شفارتز

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n|^2 \leqq (|a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2)\times$$
$$\times(|b_1|^2 + |b_2|^2 + \ldots + |b_n|^2)$$

من أجل أي مجموعة من الأعداد الحقيقية $a_1, \ldots, a_n$ و $b_1, \ldots, b_n$ وتتحقق المساواة فقط وفقط إذا كان $a_1/b_1 = \ldots = a_n/b_n$.

متراجحة المتوسطات الهندسية والحسابية والتوافقية

لتكن $a_1,a_2,\ldots,a_n$ أعداداً موجبة ، ونعرف المتوسط الحسابي A والمتوسط الهندسي G والمتوسط التوافقي H لهذه الأعداد بالعلاقات

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \quad , \quad G = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$$

عندئذٍ تتحقق المتراجحتان

$$H \leqq G \leqq A$$

(المتراجحة الأولى هنا هي $G \leqq A$ والثانية $H \leqq G$) .

وتتحقق المساواة إذا وفقط إذا كان $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

متراجحة هولدر

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n| \leqq (|a_1|^p + |a_2|^p + \dots + |a_n|^p)^{1/p}$$
$$\times(|b_1|^q + |b_2|^q + \dots + |b_n|^q)^{1/q}$$

من أجل أي مجموعة أعداد حقيقية وبحيث

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ , \ p > 1, q > 1$$

متراجحة تشيبيشيف . إذا كان $a_1 \geqq a_2 \geqq \dots \geqq a_n$ وكان $b_1 \leqq b_2 \leqq \dots \leqq b_n$ فإن

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \leqq n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)$$

متراجحة مينكوفسكي . إذا كانت $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ أعداداً موجبة وكان $p > 1$ فإن

$$[(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \dots + (a_n + b_n)^p]^{1/p} \leqq$$
$$\leqq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{1/p} + (b_1^p + b_2^p + \dots + b_n^p)^{1/p}$$

متراجحة كوشي - شفارتز للتكاملات

$$\left| \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \right| \leqq \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx \right) \left(\int_a^b |g(x)|^2\, dx \right)$$

متراجحات إضافية

(a) بفرض أن لجميع مخارج (مقامات) الكسور $a_1/b_1, a_2/b_2, \ldots, a_n/b_n$ الاشارة نفسها فإن

$$\ell \leqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leqq m$$

حيث m هو أكبر كسر من بين الكسور و ℓ هو أصغر كسر من بين هذه الكسور .

(b) إن $$\frac{a^m + b^m}{2} > \left(\frac{a + b}{2}\right)^m$$

من أجل أي عددين حقيقيين a و b وأي عدد صحيح m .

(c) ليكن x و m عددين موجبين و x و mx أصغر من الواحد فإن $(1 + x)^{-m} > 1 - mx$

(d) لتكن x و m و n أعداداً موجبة و $n > m$ عندئذٍ

$$(1 + x)^m < 1 + nx$$

من أجل قيم x الصغيرة .

(e) ليكن $m > n > a$ فإن

$$\left(\frac{m + a}{m - a}\right)^m < \left(\frac{n + a}{n - a}\right)^n$$

من أجل أي عدد حقيقي a .

25. إشارة ثنائي الحد وثلاثي الحدود

نسمي العبارة $y = ax + b\ ,\ a\neq0$ **ثنائي الحد** . ويمكن لهذه العبارة أن تكون سالبة أو موجبة أو صفراً بحسب قيم x وفقاً لما يلي :

(i) تتماثل إشارتا y و a من أجل $x > -b/a$.

(ii) تختلف إشارتا y و a من أجل $x < -b/a$.

(iii) $y = 0$ عندما $x = -b/a$.

ثلاثي الحدود هو العبارة $y = ax^2 + bx + c$ في المتغير x . وتكون هذه العبارة سالبة أو موجبة أو صفراً وفقاً لما يلي :

(i) إذا كان $b^2 - 4ac \leqq 0$ فإن هذه العبارة سالبة (أو موجبة) إذا كان a سالباً (أو موجباً) من أجل جميع قيم x .

(ii) إذا كان $b^2 - 4ac > 0$ فإن هذه العبارة تساوي الصفر من أجل قيمتين x_1,x_2 هما جذرا المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ **فإذا كان** $a < 0$ فالعبارة موجبة من أجل جميع قيم x الواقعة داخل المجال (x_1,x_2) وسالبة من أجل جميع قيم x الواقعة خارج هذا المجال . أما إذا كان $a > 0$ فإن العبارة سالبة من أجل جميع قيم x الواقعة داخل المجال (x_1,x_2) وموجبة من أجل جميع قيم x الواقعة خارج هذا المجال .

(iii) إذا كان $b^2 - 4ac = 0$ فالعبارة تساوي الصفر من أجل قيمة واحدة لـ x .

26. المتراجحة الخطية هي المتراجحة

$$ax + by + c \leqq 0(\geqq 0,\ \ < 0,\ \ > 0)$$

حيث a,b,c أعداد حقيقية ثابتة و (x,y) زوج مرتب من الأعداد الحقيقية .

مجموعة حل المتراجحة الخطية هي مجموعة الأزواج المرتبة (x,y) المحققة للمتراجحة . وهكذا فالزوج المرتب $(2,3)$ يحقق المتراجحة $3x - y + 1 > 0$ بينما لا يحقق الزوج المرتب $(1,9)$ هذه المتراجحة .

نظرية . إن المستقيم الممثل للمعادلة $ax + by + c = 0$ يقسم المستوي إلى ثلاث مجموعات من النقط : **المجموعة الأولى** هي تلك التي تجعل المقدار $ax + by + c$ **مساوياً** للصفر من أجل الاحداثيات (x,y) لأي نقطة من المستقيم .

المجموعة الثانية هي تلك التي تجعل المقدار $ax + by + c$ **أكبر** من الصفر من أجل الاحداثيات (x , y) لأي نقطة من هذه المجموعة التي نسميها **المنطقة الموجبة** .

المجموعة الثالثة هي تلك التي تجعل المقدار $ax + by + c$ أصغر من الصفر من أجل الاحداثيات (x,y) لأي نقطة من هذه المجموعة التي نسميها **المنطقة السالبة** .

ايجاد حل المتراجحة الخطية . هو إيجاد تلك المنطقة (مجموعة النقط) الموافقة للمتراجحة المطلوب حلها .

مثال . إن مجموعة حل المتراجحة $2x - 6y + 1 \geqq 0$ هي مجموعة النقط الواقعة على المستقيم $2x - 6y + 1 = 0$ بالاضافة الى جميع النقط الواقعة في المنطقة التي يقع فيها مبدأ الاحداثيات $(0,0)$.

المعادلات الجبرية

27. المعادلات التربيعية

إذا كان $a \neq 0$ $ax^2 + bx + c = 0$

فإن
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

إذا كانت a,b,c حقيقية فإن

جذران حقيقيان مختلفان $\Leftarrow$ $b^2 - 4ac > 0$

جذران حقيقيان متساويان $\Leftarrow$ $b^2 - 4ac = 0$

جذران عقديان $\Leftarrow$ $b^2 - 4ac < 0$

ويسمى المقدار $b^2 - 4ac$ مميز المعادلة التربيعية .

28. المعادلات التكعيبية

تؤول المعادلة التكعيبية

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0$$

باستخدام التحويل
$$y = x - \frac{p}{3}$$

إلى الشكل النظامي

$$x^3 + ax + b = 0$$

حيث

$$a = \frac{1}{3}(3q - p^2) \qquad b = \frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r)$$

ولهذه المعادلة ثلاثة جذور x_1,x_2,x_3 تعطى كما يلي :

$$x_1 = A + B, \quad x_2, x_3 = -\frac{1}{2}(A + B) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(A - B)$$

حيث

$$i^2 = -1 \qquad A = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

$$B = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

إذا وضعنا

$$\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = \Delta$$

فإننا نميز ما يلي :

(i) $\Delta > 0$ يوجد جذر حقيقي وجذران عقديان مترافقان .

(ii) $\Delta = 0$ يوجد ثلاثة جذور حقيقية ، منها جذران على الأقل متساويان .

(iii) $\Delta < 0$ يوجد ثلاثة جذور حقيقية مختلفة .

إذا كان $\Delta < 0$ فإن الصيغ التي تعطي الجذور ليست عملية ، والصيغ العملية لقيم الجذور هي

$$x_k = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos\left(\frac{\phi}{3} + 120^\circ k\right) \qquad k = 0, 1, 2$$

حيث $$\cos\phi = \mp\sqrt{\frac{b^2/4}{-a^3/27}}$$

ويتم أخذ الإشارة العليا إذا كان b موجباً والإشارة السفلى إذا كان b سالباً .

إذا كان $\Delta > 0$ و $a > 0$ فإن الجذر الحقيقي هو

$$x = 2\sqrt{\frac{a}{3}} \cot 2\phi$$

حيث يتم حساب ψ و ϕ من العلاقتين

$$\cot 2\psi = \mp \sqrt{\frac{b^2/4}{a^3/27}} \qquad \tan \phi = \sqrt[3]{\tan \psi}$$

ونأخذ الإشارة العليا عندما يكون b موجباً والإشارة السفلى عندما يكون b سالباً .

إذا كان $\Delta = 0$ فإن الجذور هي

$$x = \mp 2\sqrt{-\frac{a}{3}}, \qquad \pm\sqrt{-\frac{a}{3}}, \qquad \pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$$

حيث نأخذ الإشارة العليا عندما يكون b موجباً والإشارة السفلى عندما يكون b سالباً .

29. المعادلة المضاعفة التربيع (من الدرجة الرابعة)

يمكن أن تؤول المعادلة من الدرجة الرابعة

$$y^4 + py^3 + qy^2 + ry + s = 0$$

إلى الشكل (المعادلة المختزلة)

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

باستخدام التحويل

$$y = x - \frac{p}{4}$$

إذا فرضنا أن ℓ,m,n هي جذور المعادلة التكعيبية المفكَّكة

$$t^3 + \frac{a}{2}t^2 + \frac{a^2 - 4c}{16}t - \frac{b^2}{64} = 0$$

فإن الجذور المطلوبة للمعادلة المختزلة من الدرجة الرابعة هي

$$x_1 = +\sqrt{l} + \sqrt{m} + \sqrt{n} \qquad x_2 = +\sqrt{l} - \sqrt{m} - \sqrt{n}$$
$$x_3 = -\sqrt{l} + \sqrt{m} - \sqrt{n} \qquad x_4 = -\sqrt{l} - \sqrt{m} + \sqrt{n}$$

حيث يجب أن تحقق الجذور التربيعية التي نأخذها العلاقة

$$\sqrt{\ell}\ \sqrt{m}\ \sqrt{n} = -b/8$$

30. المعادلات العامة من الدرجة n (انظر أيضاً 294,305-308) .

الشكل العام للمعادلة من الدرجة n هو

$$P \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

إذا كانت $n>4$ فلا توجد صيغة عامة تعطي الجذور بدلالة المعاملات (الأمثال) . ولذا يمكن الاستفادة من الطرائق التالية :

(a) **الجذور بواسطة العوامل** . نوجد بالتجريب عدداً r بحيث يكون $x = r$ جذراً للمعادلة أي

$$a_0r^n + a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} + \cdots + a_{n-1}r + a_n = 0 \qquad a_0 \neq 0$$

عندئذٍ يكون $x-r$ عاملاً لكثير الحدود P . فإذا قسمنا P على $x-r$ لحصلنا على معادلة أقل بدرجة واحدة من المعادلة الأصلية . وهكذا يمكن تحويل كثير الحدود إلى جداء أقواس من الشكل $x-\alpha$ عددها n .

(b) **الجذور بواسطة التقريب** . نفرض أن الأمثال (المعاملات) a_i في P حقيقية ، وليكن a,b عددين حقيقيين . فإذا كانت إشارة P عند a مختلفة عن إشارة P عند b فإنه يوجد للمعادلة جذر واقع بين a و b . فإذا طبقنا المبدأ نفسه على النقطتين a و $\frac{a+b}{2}$ أو b و $\frac{a+b}{2}$ لاستطعنا أن نكشف عن موقع الجذر وأن نضيّق المجال الذي يحوي الجذر ، وبمتابعة هذه العملية يمكن الوصول إلى الجذر التقريبي بدقة كبيرة .

(c) **الجذور بواسطة الرسم** . إذا رسمنا P على أنه تابع لـ x فإن الجذور الحقيقية لـ P هي فواصل نقط تقاطع المنحني الممثل لـ P مع محور السينات .

قاعدة ديكارت . إن عدد الجذور الحقيقية الموجبة لمعادلة ذات أمثال حقيقية يساوي عدد مرات تغير إشارة كثير الحدود أو يقل عنه بعدد زوجي موجب ، حيث نعد الجذر المضاعف m مرة و m جذراً .

علاقات فييت . تُعطي العلاقات بين $x_1, x_2, \ldots, x_n$ جذور $P=0$ وأمثال كثير الحدود P بالشكل التالي :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -a_1/a_0$$

$$a_2/a_0 = \text{مجموع جداءات الجذور مثنى مثنى}$$

$$-a_3/a_0 = \text{مجموع جداءات الجذور ثلاث ثلاث}$$

$$x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n a_n/a_o$$

31. المعادلة $x^n = a$

لهذه المعادلة n جذراً تُعطى كما يلي :

$$x = \begin{cases} \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right) & , a > 0 \\ \sqrt[n]{-a}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) & , a < 0 \end{cases}$$

حيث $k = 0,1,2,3,\ldots,n-1$.

32. صيغة ستيرلينغ

لدينا من أجل قيم كبيرة لـ n

$$\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n-1}\right)$$

حيث $\pi=3.14159\ldots$ و $e=2.71828\ldots$

$$\log n! \cong (n + \tfrac{1}{2})\log n - n\log e + \log\sqrt{2\pi}$$

2. الهندسة الابتدائية

نستخدم فيما يلي الرموز a,b,c,d,s للأطوال و A للمساحات و V للحجوم .

32. المثلث (انظر 65)

$$A = bh / 2$$

حيث b قاعدة المثلث و h ارتفاعه .

33. المستطيل

$$A = ab$$

حيث a طول أحد ضلعي المستطيل و b طول الضلع الآخر .

34. متوازي الأضلاع

$$A = ah = ab \sin\theta$$

حيث a و b طولا ضلعين متجاورين و h الارتفاع و θ الزاوية بين ضلعين متجاورين .

35. شبه المنحرف

$$A = \frac{1}{2} h (a + b)$$

حيث a و b طولا الضلعين المتوازيين و h الارتفاع .

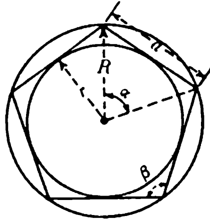
36. مُضَلّع نظامي ذو n ضلعاً

(a طول الضلع) $$A = \frac{1}{4} na^2 \cot \frac{180°}{n}$$

(R نصف قطر الدائرة المارة بالرؤوس) $$R = \frac{a}{2} \csc \frac{180°}{n}$$

(r نصف قطر الدائرة المماسة داخلاً) $$r = \frac{a}{2} \cot \frac{180°}{n}$$

من أجل الزاويتين α و β المبينتين على الشكل لدينا



(راديان) $$\alpha = \frac{360°}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

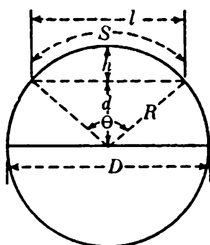
(راديان) $$\beta = \frac{n-2}{n} \times 180° = \frac{n-2}{n} \pi$$

$$a = 2r \tan \frac{\alpha}{2} = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$$

37. الدائرة

نفرض

S طول القوس الذي تحصره زاوية θ	$C =$ المحيط
ℓ طول الوتر الذي يحد القوس S	$R =$ نصف القطر
h الارتفاع	$D =$ القطر
θ مقدار الزاوية المركزية بالراديان	$A =$ المساحة



$$C = 2\pi R = \pi D \qquad \pi = 3.14159\cdots$$

$$S = R\theta = \tfrac{1}{2}D\theta = D\cos^{-1}\frac{d}{R}$$

$$l = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2R\sin\frac{\theta}{2} = 2d\tan\frac{\theta}{2}$$

$$d = \tfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l^2} = R\cos\frac{\theta}{2} = \tfrac{1}{2}l\cot\frac{\theta}{2}$$

$$h = R - d$$

$$\theta = \frac{S}{R} = \frac{2S}{D} = 2\cos^{-1}\frac{d}{R} = 2\tan^{-1}\frac{l}{2d} = 2\sin^{-1}\frac{l}{D}$$

$$A\ (\text{للدائرة}) = \pi R^2 = \tfrac{1}{4}\pi D^2$$

$$A\ (\text{للقِطّاع}) = \tfrac{1}{2}Rs = \tfrac{1}{2}R^2\theta$$

القِطّاع هو جزء الدائرة المحصور بين نصفي قطرين فيها .

القطعة الدائرية هي جزء الدائرة المحصور بين وتر في الدائرة والقوس الذي يحصره هذا الوتر .

A (للقطعة الدائرية) = A (للقطاع) − A (للمثلث)

$$= \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin\theta)$$

$$= R^2 \cos^{-1} \frac{R-h}{R} - (R-h)\sqrt{2Rh - h^2}$$

محيط مضلع منتظم ذو n ضلعاً **مُحاط** بدائرة تمر من رؤوسه يساوي

$$2n R \sin \frac{\pi}{n}$$

مساحة المضلع المُحاط = $\frac{1}{2} n R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$

محيط مضلع منتظم ذو n ضلعاً **محيط** بدائرة مماسة لأضلاعه يساوي

$$2n R \tan \frac{\pi}{n}$$

مساحة المضلع المحيط = $n R^2 \tan \frac{\pi}{n}$

نصف قطر الدائرة المماسة داخلاً لأضلاع مثلث هو (انظر الشكل في **63**)

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \qquad s = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

حيث a, b, c أطوال أضلاع المثلث .

نصف قطر الدائرة المار برؤوس مثلث هو

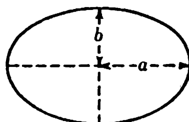
$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

38. القطع الناقص (انظر 84)

مساحة القطع الناقص = πab

محيط القطع الناقص = $4a\ E(k)$

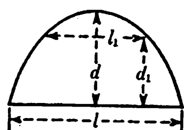
حيث $k^2=1-(b^2/a^2)$ و $E(k)$ هو **التكامل القطعي التام** (انظر الجدول 5)



و a طول نصف المحور الكبير ، b طول نصف المحور الصغير .

39. القطع المكافىء (انظر 83)

مساحة جزء القطع المكافىء الذي طول وتره ℓ والمبين على الشكل هو



$$A = \frac{2\ell d}{3}$$

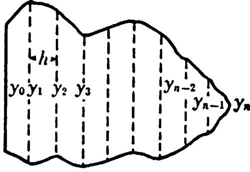
$$d_1 = \frac{d}{\ell^2}(\ell^2 - \ell_1^2)\ ;\ \ell_1 = \ell\sqrt{\frac{d-d_1}{d}}$$

طول القوس = $\ell \left\{ 1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2d}{\ell}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{2d}{\ell}\right)^4 + \ldots \right\}$

39 a. القطع الزائد (انظر 85).

40. السليسلة ، السيكلوئيد ، . . . (انظر 91-101) .

41. المساحة بواسطة التقريب



إذا كانت $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ أطوال سلسلة أوتار يبعد كل واحد عن المجاور له بمقدار ثابت h ، فإن المساحة المحصورة بالحدود تعطى بإحدى العلاقات التالية :

(قاعدة شبه المنحرف)

$$A_T = h[\tfrac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}]$$

(قاعدة دوراند)

$$A_D = h[0.4(y_0 + y_n) + 1.1(y_1 + y_{n-1}) + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-2}]$$

(قاعدة سيمبسون ، n زوجي)

$$A_S = \tfrac{1}{3}h[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})]$$

تعطي A_S عموماً التقريب الأكثر دقة للمساحة . وكلما كانت n كبيرة كانت درجة الدقة أكبر .

42. المكعب

إذا كان a طول ضلع المكعب و d قطره فإن $V=a^3$ و $d=a\sqrt{3}$ ومساحته الكلية = $6a^2$.

43. متوازي المستطيلات .

$V = abc$ $\qquad d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

المساحة الكلية = $2\,(ab + bc + ca)$

حيث a, b, c أطوال الأضلاع و d طول القطر .

44. الموشور أو الأسطوانة

(مساحة القاعدة × الارتفاع) $\frac{1}{3}$ = الحجم

الحرف الجانبي × محيط المقطع القائم = السطح الجانبي

45. الهرم أو المخروط

(مساحة القاعدة × الارتفاع) $\frac{1}{3}$ = الحجم

طول مولّد المخروط × نصف قطر القاعدة × π = المساحة الجانبية لمخروط دوراني قائم

(محيط القاعدة × الارتفاع المائل) $\frac{1}{2}$ = المساحة الجانبية لهرم منتظم

الارتفاع المائل هو طول العمود النازل من رأس الهرم على أحد الأضلاع المقابلة .

46. جذع المخروط أو الهرم

$$V = \frac{1}{3} (A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})h$$

حيث h هو الارتفاع ، A_2, A_1 مساحتا القاعدتين .

(الارتفاع المائل × مجموع محيطي القاعدتين) $\frac{1}{2}$ = المساحة الجانبية لجذع منتظم

الارتفاع المائل هو ارتفاع أحد الوجوه الجانبية .

46 a. شبه الموشور

هو كثير وجوه تقع جميع رؤوسه في مستويين متوازيين بحيث يكون عدد الرؤوس الواقعة في المستوي الأول مساوياً لعدد الرؤوس الواقعة في المستوي الثاني . وتشكل الرؤوس في كل مستوٍ مضلعاً نسميه **قاعدة شبه الموشور** .

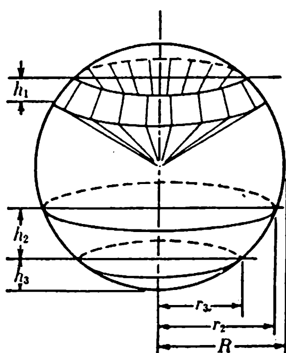
$$\text{حجم شبه الموشور} = \frac{h}{6}(A_1+A_2+4A_3)$$

حيث h ارتفاع شبه الموشور (البعد بين المستويين المتوازيين اللذين يحويان القاعدتين) ، A_1, A_2 مساحتا القاعدتين ، A_3 مساحة المقطع الموازي للقاعدتين والواقع في منتصف المسافة بين المستويين .

47. حجم ومساحة سطح كثيرات وجوه منتظمة طول ضلعها ℓ .

الحجم	مساحة السطح	نوع السطح	التسمية
$0.11785\ell^3$	$1.73205\ell^2$	4 مثلثات متساوية الأضلاع	رباعي الوجوه
$1.00000\ell^3$	$6.00000\ell^2$	6 مربعات	سداسي الوجوه (مكعب)
$0.47140\ell^3$	$3.46410\ell^2$	8 مثلثات متساوية الأضلاع	ثماني الوجوه
$7.66312\ell^3$	$20.64578\ell^2$	12 مخمس	ذو اثني عشر وجهاً
$2.18169\ell^3$	$8.66025\ell^2$	20 مثلث متساوي الأضلاع	عشروني الوجوه

48. الكرة .



مساحة الكرة $= 4\pi R^2 = \pi D^2$

مساحة النطاق $= 2\pi R h_1 = \pi D h_1$

النطاق لسطح دوراني هو جزء السطح المحصور بين مستويين متعامدين مع محور الدوران .

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$$

$$\text{حجم القطاع الكروي} = \frac{2}{3}\pi R^2 h_1 = \frac{1}{6}\pi D^2 h_1$$

القطاع الكروي هو الحجم المتولد من دوران قطاع دائري في دائرة عظمى للكرة حول قطر الدائرة .

$$\text{حجم قطعة كروية ذات قاعدة واحدة} = \frac{1}{6}\pi h_3 (3r_3^2 + h_3^2)$$

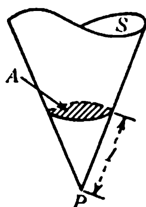
$$\text{حجم قطعة كروية ذات قاعدتين} = \frac{1}{6}\pi h_2 (3r_3^2 + 3r_2^2 + h_2^2)$$

$$\text{مساحة الهلال الكروي} = 2R^2\theta$$

حيث θ هي الزاوية بالراديان بين المستويين المارين من قطر الكرة واللذين يحصران الهلال .

49. الزاوية المجسمة ψ

الزاوية المجسمة ψ المقابلة لسطح S في أي نقطة P تساوي المساحة A لسطح جزء الكرة التي مركزها P ونصف قطرها 1 ، والمحصور داخل مخروط رأسه P ومولداته تمر من محيط السطح S .



أما وحدة الزاوية المجسمة ψ فتسمى **ستيراديان**

كما أن قياس الزاوية المجسمة الكاملة حول نقطة هو 4π ستيراديان .

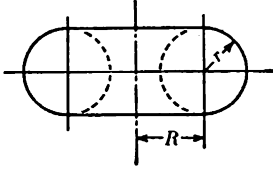
50. مجسم القطع الناقص

هو مجسم يشبه البيضة بحيث يكون منحني تقاطعه مع أي مستوٍ قاطع له هو قطع ناقص .

$$V = \frac{4}{3} \pi a b c$$

حيث a,b,c أطوال أنصاف أقطاره .

60. الحلقة



$$V = 2\pi^2 R r^2$$

مساحة السطح $= S = 4\pi^2 R r$

61. نظريات بابوس

(a) إذا دوّرنا مساحة مستوية A حول مستقيم ℓ غير قاطع لـ A ويقع في مستويها ، فإن حجم المجسم المتولِّد يساوي جداء A بالمسافة التي يقطعها مركز ثقل A .

(b) إذا دوّرنا منحنياً مستوياً C حول مستقيم غير قاطع لـ C وواقع في مستويه ، فإن مساحة السطح المتولّد من C يساوي جداء طول C في المسافة التي يقطعها مركز ثقل C .

3. المثلثات

52. الزاوية

إذا تقاطع مستقيمان في نقطة ، فإنه يمكن تدوير أحدهما حول نقطة التقاطع حتى ينطبق على الآخر . نسمي مقدار الدوران اللازم للانطباق قياس **الزاوية** بين المستقيمين . ويكون قياس الزاوية (مقدار الدوران) **موجباً** إذا تم الدوران عكس عقارب الساعة ، ويكون **سالباً** إذا تم الدوران مع عقارب الساعة .

ونصطلح على أن قياس الزاوية المقابلة لدورة كاملة لمستقيم لينطبق على نفسه هي $360°$ ، وهكذا فإن **الدرجة** هي مقدار دوران يعادل 1/360 من الدورة الكاملة .

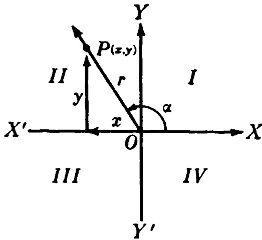
الراديان هو قياس الزاوية التي رأسها مركز دائرة وتقابل قوساً طوله يساوي نصف قطر تلك الدائرة .

$\frac{180}{\pi}$ درجة = 1 راديان ، $\frac{180}{\pi}$ راديان = $1°$ ، π راديان = $180°$

ملاحظة . من أجل السهول يتم إلباس الزاوية بقياسها فنقول «الزاوية $30°$» بدلاً من «الزاوية التي قياسها $30°$» .

53. التوابع المثلثية لزاوية α

لتكن α زاوية ينطبق ضلعها الأول على محور السينات الموجب ، وينطبق رأسها على مبدأ الاحداثيات O ، ولتكن $P(x,y)$ نقطة ما على الضلع الآخر للزاوية ، حيث (x,y) تشير إلى احداثيات النقطة P . لتكن r المسافة الموجبة بين P و O . عندئذٍ نعرّف التوابع المثلثية للزاوية α على النحو التالي :



$$\text{sine } \alpha = \sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\text{cosine } \alpha = \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\text{tangent } \alpha = \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\text{cotangent } \alpha = \cot \alpha = \text{ctn } \alpha = \frac{x}{y}$$

$$\text{secant } \alpha = \sec \alpha = \frac{r}{x}$$

$$\text{cosecant } \alpha = \csc \alpha = \frac{r}{y}$$

$$\text{exsecant } \alpha = \text{exsec } \alpha = \sec \alpha - 1$$

$$\text{versine } \alpha = \text{vers } \alpha = 1 - \cos \alpha$$

$$\text{coversine } \alpha = \text{covers } \alpha = 1 - \sin a$$

$$\text{haversine } \alpha = \text{hav } \alpha = \tfrac{1}{2} \text{ vers } \alpha$$

(انظر 86 و 87) من أجل رسم منحنيات هذه التوابع .

54. إشارات التوابع

الرُّبع	sin	cos	tan	cot	sec	csc
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

55. توابع الزوايا الشهيرة

	0°	*30°*	*45°*	*60°*	*90°*	*180°*	*270°*	*360°*
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0		0
cot		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		0	
sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2		−1		1
csc		2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1		−1	

56. تغيرات التوابع

الرُّبع	sin	cos	tan	cot	sec	csc
I	$0 \to +1$	$+1 \to 0$	$0 \to +\infty$	$+\infty \to 0$	$+1 \to +\infty$	$+\infty \to +1$
II	$+1 \to 0$	$0 \to -1$	$-\infty \to 0$	$0 \to -\infty$	$-\infty \to -1$	$+1 \to +\infty$
III	$0 \to -1$	$-1 \to 0$	$0 \to +\infty$	$+\infty \to 0$	$-1 \to -\infty$	$-\infty \to -1$
IV	$-1 \to 0$	$0 \to +1$	$-\infty \to 0$	$0 \to -\infty$	$+\infty \to +1$	$-1 \to -\infty$

57. قوانين الارجاع إلى الربع الأول

	$-\alpha$	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$	$n(360)^\circ \pm \alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
tan	$-\tan\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\tan\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\tan\alpha$
cot	$-\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$\pm\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$\pm\cot\alpha$
sec	$+\sec\alpha$	$\mp\csc\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\csc\alpha$	$+\sec\alpha$
csc	$-\csc\alpha$	$+\sec\alpha$	$\mp\csc\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\csc\alpha$

n تشير إلى أي عدد صحيح . فمثلاً

$$\tan(270^\circ + \alpha) = -\cot\alpha$$

58. المتطابقات الأساسية

$$\sin\alpha = \frac{1}{\csc\alpha};\ \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha};\ \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha};\ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha};\ \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha;\ 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\sin n\alpha = 2\sin(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin(n-2)\alpha$$

$$\cos n\alpha = 2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \cos(n-2)\alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

نأخذ الإشارة الموجبة إذا كان $\frac{\alpha}{2}$ في الربع الأول أو الثاني ونأخذ الإشارة السالبة فيما عدا ذلك .

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

نأخذ + إذا كانت $\frac{\alpha}{2}$ في الربع الأول أو الرابع و − فيما عدا ذلك .

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

نأخذ + إذا كانت $\frac{\alpha}{2}$ في الربع الأول أو الثالث و − فيما عدا ذلك .

$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha);\ \cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin^3\alpha = \tfrac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha);\ \cos^3\alpha = \tfrac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$$

59. العلاقات بين التوابع المثلثية

التابع	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\frac{1}{\csc\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\frac{\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\tan\alpha$	$\frac{1}{\cot\alpha}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$
$\cot\alpha$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	$\cot\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}$
$\sec\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha}$	$\sec\alpha$	$\frac{\csc\alpha}{\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$
$\csc\alpha$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}$	$\frac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\csc\alpha$

ملاحظة : يتم تحديد الإشارة التي نأخذها بحسب الربع الذي تقع فيه α .

60. التوابع المثلثية المعاكسة

يُعطى الحل التام للمعادلة $x = \sin y$ بالراديان كما يلي :

$$y = (-1)^n \operatorname{Sin}^{-1} x + n\pi \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \operatorname{Sin}^{-1} x \leqq \frac{\pi}{2}$$

حيث $\operatorname{Sin}^{-1} x$ هي **القيمة الرئيسية** للزاوية التي جيبها هو x ، و n عدد صحيح . وبصورة مشابهة نجد أنه إذا كان :

$$x = \tan y$$

فإن
$$y = \operatorname{Tan}^{-1} x + n\pi \qquad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Tan}^{-1} x < \frac{\pi}{2}$$

يشير الرمز $\sin^{-1} x$ (أو $\arcsin x$) إلى أي زاوية y جيبها x ، بينما نستخدم الرمز $\operatorname{Sin}^{-1} x$ (أو $\operatorname{Arc} \sin x$) لنعبّر عن **القيمة الرئيسية** أي لتلك الزاوية التي جيبها x وتقع في مجال محدد نعيّنه بصورة مناسبة ، ويبين الجدول التالي هذه المجالات :

العلاقة	القيمة الرئيسية	
$\sin^{-1} x$	$-\frac{\pi}{2} \leqq \operatorname{Sin}^{-1} x \leqq \frac{\pi}{2}$	
$\tan^{-1} x$	$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Tan}^{-1} x < \frac{\pi}{2}$	
$\sec^{-1} x$	$0 \leqq \operatorname{Sec}^{-1} x < \frac{\pi}{2}$	عندما $x > 0$
	$-\pi \leqq \operatorname{Sec}^{-1} x < -\frac{\pi}{2}$	عندما $x < 0$
$\cosh^{-1} x$	$0 \leqq \operatorname{Cosh}^{-1} x$	

العلاقة	القيمة الرئيسية	
$\cos^{-1} x$	$0 \leqq \text{Cos}^{-1} x \leqq \pi$	
$\cot^{-1} x$	$0 < \text{Cot}^{-1} x < \pi$	
$\csc^{-1} x$	$0 < \text{Csc}^{-1} x \leqq \frac{\pi}{2}$	عندما $x > 0$
	$-\pi < \text{Csc}^{-1} x \leqq -\frac{\pi}{2}$	عندما $x < 0$
$\text{sech}^{-1} x$	$0 \leqq \text{Sech}^{-1} x$	

61. علاقات خاصة

يمكن ربط القيم الرئيسية للتوابع المثلثية المعاكسة على النحو التالي : (بفرض $a > 0$)

$$\sin^{-1} a = \cos^{-1}\sqrt{1-a^2} = \tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$$

$$= \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} = \csc^{-1}\frac{1}{a}$$

$$\cos^{-1} a = \sin^{-1}\sqrt{1-a^2} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} = \cot^{-1}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$= \sec^{-1}\frac{1}{a} = \csc^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$\tan^{-1} a = \sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \cot^{-1}\frac{1}{a}$$

$$= \sec^{-1}\sqrt{1+a^2} = \csc^{-1}\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$$

$$\cot^{-1} a = \tan^{-1}\frac{1}{a};\ \sec^{-1} a = \cos^{-1}\frac{1}{a};\ \csc^{-1} a = \sin^{-1}\frac{1}{a}$$

62. حل المعادلات المثلثية

يتم حل المعادلة المثلثية بتحويلها إلى أحد الأشكال الأساسية التالية التي نعرضها فيما يلي :

(a) $sin\ x = \ell$. إذا كانت $|\ell| > 1$ فلا يوجد للمعادلة حل ، أما إذا كانت $|\ell| \leqslant 1$ فإنه يوجد زاوية α بحيث $\ell = sin\ \alpha$ وبالتالي فإن :

$$Sin\ x = Sin\ \alpha$$

$$x = \alpha + 2\ \pi k\ ,\ x = \pi - \alpha + 2\ \pi k$$

حيث $k = 0,\ 1,\ 2,\ ....$.

(b) $cos\ x = m$. إذا كانت $|m| > 1$ فلا يوجد حل للمعادلة ، أما إذا كانت $|m| \leqslant 1$ فإنه يوجد زاوية α بحيث $m = cos\ \alpha$ وبالتالي فإن

$$cos\ x = cos\ \alpha$$

$$x = \pm\ \alpha + 2\ k\ \pi$$

حيث $k = 0,\ 1,\ 2,\ ....$.

(c) $tan\ x = p$. يوجد دائماً زاوية α بحيث $tan\ \alpha = p$ وبالتالي

$$x = \alpha + k\ \pi$$

حيث $k = 0,\ 1,\ 2,\ ....$.

$$A \cos x + B \sin x = C \ , \ A.B.C \neq 0 \quad \textbf{(d)}$$

نقسم طرفي المعادلة على $\sqrt{A^2 + B^2}$ ونفرض

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ , \ \sin \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 = B^2}}$$

فتؤول المعادلة إلى الشكل

$$\cos (x - \alpha) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

الذي يُحَل كما في (b) .

$$A \cos^2 x + B \sin^2 x + C \sin x \cos x = D \quad \textbf{(e)}$$

نحوّل هذه المعادلة إلى الشكل (d) بالانتقال إلى ضعف الزاوية x .

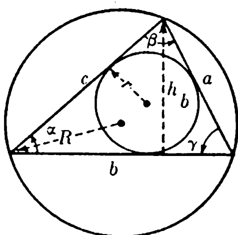
$$A (\cos x \pm \sin x) + B \sin x \cos x = C \quad \textbf{(f)}$$

نستخدم التحويل $x = y \pm \frac{\pi}{4}$ لنحصل على معادلة جبرية من الدرجة الثانية في $\cos y$ أو $\sin y$ تؤول بعد حلها إلى أحد الشكلين (a) , (b) .

63. العلاقات بين أضلاع وزوايا المثلث

لتكن a, b, c أضلاع المثلث و α, β, γ الزوايا المقابلة لهذه الأضلاع على الترتيب ، ولندخل الرموز التالية :

المساحة = A $\qquad$ $2s = a + b + c$



الارتفاع المتعلق بالضلع $h_b = b$

نصف قطر الدائرة المماسة للمثلث داخلاً = r

نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث = R

عندئذٍ لدينا

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

(قانون الجيوب)* $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

(قانون الظلال) $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

(قانون جيوب التمام)* $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta^*$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}^* \qquad \sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}^*$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}^* \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}^*$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{r}{s-a}^*$$

حيث $$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$A = \tfrac{1}{2}bh_b^* = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma^* = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma^*}{2\sin\alpha}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = rs$$

$$R = \frac{a^*}{2\sin\alpha} = \frac{abc}{4A} \qquad h_b = c\sin\alpha^* = a\sin\gamma^* = \frac{2rs}{b}$$

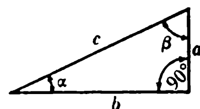
---

* يمكن كتابة قانونين آخرين بوضع b بدلاً عن a و c بدلاً عن b و a بدلاً عن c و β بدلاً عن α و γ بدلاً عن β و α بدلاً عن γ . وهو ما نسميه التبديل الدّوري الذي نرمز له عادة بالشكل

$(a,b,c) \to (b,c,a)$, $(\alpha,\beta,\gamma) \to (\beta,\gamma,\alpha)$

64. حل المثلث القائم

حل المثلث هو إيجاد جميع زواياه وأضلاعه ، فإذا عُلِم ضلع وزاوية حادة أو ضلعين فإن إيجاد باقي العناصر يتم من العلاقات التالية



$$a = \sqrt{(c+b)(c-b)} = c \sin\alpha = b \tan\alpha$$

$$b = \sqrt{(c+a)(c-a)} = c \cos\alpha = \frac{a}{\tan\alpha}$$

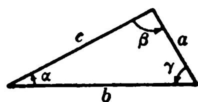
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \beta = 90° - \alpha$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\cos\alpha} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$A = \tfrac{1}{2}ab = \frac{a^2}{2\tan\alpha} = \frac{b^2\tan\alpha}{2} = \frac{c^2\sin 2\alpha}{4}$$

65. حل المثلث المائل (الشكل 12)

إن العلاقات الواردة في 63 تمكننا من حل المثلث المائل ، سنعرض فيما يلي الحالات الرئيسية :



(a) إذا عُلم ضلعان b و c والزاوية المحصورة بينهما α فإن

$$\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = 90° - \tfrac{1}{2}\alpha \qquad \tan\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{b-c}{b+c}\tan\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)$$

$$\beta = \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) + \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) \qquad \gamma = \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) - \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)$$

$$a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$$

(b) إذا عُلم زاويتان α و β وأي ضلع c مثلاً فإن

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} \qquad a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} \qquad \gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$

(c) إذا عُلم ضلعان a و c وزاوية مقابلة لأحدهما مثلاً α فإن

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \qquad \beta = 180° - (\alpha + \gamma) \qquad \sin \gamma = \frac{c \sin \alpha}{a}$$

يوجد في هذه الحالة مجموعتان من الحلول ، إذ يمكن أن تأخذ γ قيمتين $\gamma_1 < 90°$ و $\gamma_2 = 180° - \gamma_1 > 90°$. فإذا كان $\alpha + \gamma_2 > 180°$ نأخذ فقط γ_1 .

(d) إذا عُلم ثلاثة أضلاع a, b, c فإن

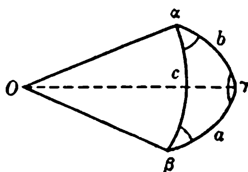
$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \qquad s = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\tan \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{r}{s-c} \qquad \tan \tfrac{1}{2}\beta = \frac{r}{s-b} \qquad \tan \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{r}{s-a}$$

66. المثلث الكروي

هو مثلث تقع رؤوسه على سطح كرة ، وأضلاعه هي أقواس من الدوائر العظمى المارة بكل رأسين منه . نذكّر بأن **الدائرة العظمى** لكرة هي دائرة تقاطع مستوٍ مار بمركز الكرة . (انظر الشكل) . وتقاس أضلاع المثلث الكروي عادة

بالزوايا المركزية التي تقابل هذه الأضلاع .



المثلث القطبي الموافق لمثلث كروي هو مثلث رؤوسه **أقطاب أضلاع** المثلث المعطى ، حيث نختار الأقطاب الأقرب إلى الرأس المقابل للضلع الذي نأخذ أقطابه .

قطبا ضلع مثلث كروي هما نقطتا تقاطع الكرة مع المستقيم المار بمركز الكرة والمتعامد مع الدائرة التي جزء قوسها ذلك الضلع .

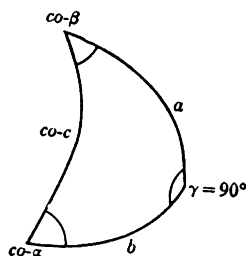
66 a. المثلث الكروي القائم

بفرض O مركز الكرة و a, b, c أضلاع المثلث الكروي **القائم** المقابلة للزوايا α, β, $\gamma = 90°$ على الترتيب ، حيث تقاس الأضلاع بالزوايا التي رأسها O وتحد تلك الأضلاع . عندئذٍ

$$\sin a = \sin\alpha \sin c \qquad \sin b = \sin\beta \sin c$$
$$\sin a = \tan b \cot\beta \qquad \sin b = \tan a \cot\alpha$$
$$\cos\alpha = \cos a \sin\beta \qquad \cos\beta = \cos b \sin\alpha$$
$$\cos\alpha = \tan b \cot c \qquad \cos\beta = \tan a \cot c$$
$$\cos c = \cot\alpha \cot\beta \qquad \cos c = \cos a \cos b$$

67. قاعدتا نابيير للأجزاء الدائرية (انظر الشكل)

هما قاعدتان تُسهِّلان كتابة وحفظ الصيغ السابقة . فلو فرضنا أننا رتّبنا الكميات الخمسة a, b و $co-c$,$co-\beta$,$co-\alpha$ كما في الشكل ، حيث $co-\alpha$ تعني متممة α . فإنه يمكن اعتبار أي كمية على أنها **المنتصف** وتقع كميتان **بجوارها** وكميتان **مقابلها** ، وبالتالي :



(a) **إن جيب الكمية المنتصف يساوي جداء ظِلَّ الكميتين المجاورتين .**

(b) إن جيب الكمية المنتصف يساوي جداء جَيبَيّ تمام الكميتين المقابلتين .

68. المثلث الكروي المائل

لتكن a, b, c أضلاع المثلث الكروي و α, β, γ الزوايا المقابلة للأضلاع ، $\triangle$ مساحة المثلث ، E الفائض الكروي (وهو مقدار زيادة مجموع زوايا المثلث الكروي عن 180°) ، R نصف قطر الكـرة التي يقع عليها المثلث . لتكن $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ المقادير المرتبطة بالمثلث القطبي الموافق للمثلث المعطى فإن

$$0^\circ < a + b + c < 360^\circ \qquad 180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - a' \qquad \beta = 180^\circ - b' \qquad \gamma = 180^\circ - c'$$

$$a = 180^\circ - \alpha' \qquad b = 180^\circ - \beta' \qquad c = 180^\circ - \gamma'$$

(قانون الجيوب)

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

(قانون جيوب التمام)

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s \sin (s - a)}}, \quad s = \tfrac{1}{2}(a + b + c)$$

$$\tan \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}}, \quad \sigma = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\tan \frac{1}{2}c}{\tan \frac{1}{2}(a - b)} \qquad \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\tan \frac{1}{2}c}{\tan \frac{1}{2}(a + b)}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b)}{\sin \frac{1}{2}(a - b)} = \frac{\cot \frac{1}{2}\gamma}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \qquad \frac{\cos \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2}(a - b)} = \frac{\cot \frac{1}{2}\gamma}{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2}c = \cos \tfrac{1}{2}(a - b) \cos \tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2}c = \cos \tfrac{1}{2}(a + b) \sin \tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \tfrac{1}{2}c = \sin \tfrac{1}{2}(a - b) \cos \tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \tfrac{1}{2}c = \sin \tfrac{1}{2}(a + b) \sin \tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\tan \frac{E}{4} = \sqrt{\tan \tfrac{1}{2}s \tan \tfrac{1}{2}(s - a) \tan \tfrac{1}{2}(s - b) \tan \tfrac{1}{2}(s - c)}$$

$$\Delta = \frac{\pi R^2 E}{180} \qquad \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = E$$

التوابع القطعية (الزائدية)

69. تعاريف

(من أجل تعريف e انظر 108 ، ومن أجل المشتقات والتكاملات ، انظر 121) .

$$\text{جيب } x \text{ القطعي} = \sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$
$$\text{جيب تمام } x \text{ القطعي} = \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
$$\text{ظل } x \text{ القطعي} = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x}$$

70. التوابع الزائدية المعاكسة (انظر 60)

إذا كان $x = sinh\ y$ فإن y هو **الجيب الزائدي المعاكس** الذي نرمز له

بـ $y = sinh^{-1}\ x$ أو بـ $arc\,sinh\ x$ ويكون

$$\sinh^{-1} x = \log_e (x + \sqrt{x^2 + 1})^*$$
$$\cosh^{-1} x = \log_e (x + \sqrt{x^2 - 1})^\dagger$$
$$\tanh^{-1} x = \tfrac{1}{2} \log_e \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad \coth^{-1} x = \tfrac{1}{2} \log_e \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$$
$$\operatorname{sech}^{-1} x = \log_e \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)^\dagger$$
$$\operatorname{csch}^{-1} x = \log_e \left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right)^\ddagger$$

71. متطابقات أساسية

$$\sinh(-x) = -\sinh x \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\cosh(-x) = \cosh x \qquad \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$$

---

* إذا كان $x \geqslant 0$. † من أجل القيم الرئيسية . ‡ إذا كان $0 < x$ ، $x > 0$.

$$\tanh(-x) = -\tanh x \qquad \operatorname{csch}^2 x - \coth^2 x = -1$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$2 \sinh^2 \frac{x}{2} = \cosh x - 1 \qquad 2 \cosh^2 \frac{x}{2} = \cosh x + 1$$

72. العلاقة بين التوابع الزائدية والتوابع الدائرية

$$\sin x = -i \sinh ix \qquad \cos x = \cosh ix \qquad \tan x = -i \tanh ix$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad i^2 = -1$$

$$\sin ix = i \sinh x \qquad \cos ix = \cosh x \qquad \tan ix = i \tanh x$$

$$\sinh ix = i \sin x \qquad \cosh ix = \cos x \qquad \tanh ix = i \tan x$$

$$\sinh(x \pm iy) = \sinh x \cos y \pm i \cosh x \sin y$$

$$\cosh(x \pm iy) = \cosh x \cos y \pm i \sinh x \sin y$$

$$\sinh(x + 2i\pi) = \sinh x \qquad \cosh(x + 2i\pi) = \cosh x$$

$$\sinh(x + i\pi) = -\sinh x \qquad \cosh(x + i\pi) = -\cosh x$$

$$\sinh(x + \tfrac{1}{2}i\pi) = i \cosh x \qquad \cosh(x + \tfrac{1}{2}i\pi) = i \sinh x$$

$$e^{\theta} = \cosh \theta + \sinh \theta \qquad e^{-\theta} = \cosh \theta - \sinh \theta$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \qquad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

حيث $x + iy = re^{i\theta}$

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \ \theta = \arccos \frac{x}{r} = \arcsin \frac{y}{r}$$

$$\log_e (x \pm iy) = \tfrac{1}{2} \log_e (x^2 + y^2) \pm i \arctan \frac{y}{x}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

(نظرية دي موافر)

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^n = 1 \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$$

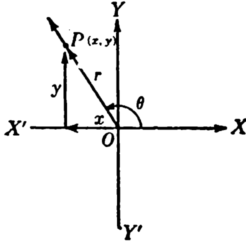
$$\sinh x - \sinh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$$

$$\cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$$

$$\cosh x - \cosh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$$

4. الهندسة التحليلية

73. الاحداثيات القائمة



ليكن المستقيمان $X'X$ (المحور x) و $Y'Y$ (المحور y) المتعامدان والمتلاقيان في نقطة O التي نسميها **مبدأ الاحداثيات** . فإن أي نقطة P في مستوي المحورين تتعين تماماً بعددين x (**فاصلة** P) و y (**ترتيب** P) يمثلان بُعدَي P عن المحورين $Y'Y$ و $X'X$ على الترتيب ونكتب $P(x,y)$. ويكون x موجباً إلى يمين O وسالباً إلى يسارها ، أما y فيكون موجباً فوق O وسالباً تحت O . ويُسمى x و y **الاحداثيان القائمان** ، أو الديكارتيان للنقطة P .

74. الاحداثيات القطبية

ليكن لدينا المستقيم الثابت OX (**المحور القطبي**) المنبعث من نقطة O (**المبدأ** أو **القطب**) . عندئذٍ يمكن تعيين أي نقطة P في مستوٍ يحوي OX بعددين الأول r وهو بعد P عن O (نصف القطر المتجهي) والثاني θ الزاوية

بين OX و OP (الزاوية المتجهية) .

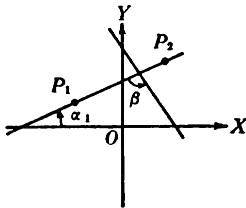
ونكتب $P(r,\theta)$. تكون θ موجبة إذا تم دوران OX للانطباق على OP بعكس عقارب الساعة . بينما تكون θ سالبة إذا تم دوران OX للانطباق على OP مع عقارب الساعة . أما r فتكون موجبة إذا كان OP بنفس اتجاه OX المنطبق على OP بعد الدوران ، وسالبة إذا كان OP بعكس اتجاه OX . ونسمي العددين r و θ **الاحداثيان القطبيان** للنقطة P .

75. العلاقات بين الاحداثيات القائمة والقطبية (انظر 113)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

76. النقط والميول

لتكن لدينا النقطتان $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ ولنفرض أن α_1 هي الزاوية المقاسة من OX إلى P_2P_1 بعكس عقارب الساعة : فإن **المسافة** d بين P_1 و P_2 تعطى بالعلاقة



$$P_1P_2 = d = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

أما ميل P_1P_2 فهو

$$\tan\alpha_1 = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

إحداثيات النقطة القاسمة لـ $P_1 P_2$ بالنسبة $m_1 : m_2$ هي

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} \, , \, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

إحداثيات منتصف $P_1 P_2$ هي

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \, , \, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

الزاوية β **بين مستقيمين** ميلاهما m_1 , m_2 تعطى بالعلاقة

$$\tan \beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

يتعامد مستقيمان ميلاهما m_1 , m_2 إذا كان $m_1 m_2 = -1$.

يتوازى مستقيمان إذا كان $m_1 = m_2$

77. مساحة مثلث

إذا كانت $(x_1,y_2), (x_2,y_2), (x_3,y_3)$ رؤوس مثلث فإن مساحته تساوي

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2)$$

78. المحل الهندسي والمعادلة

المحل الهندسي هو مجموعة كل النقط التي تحقق شرطاً محدداً أو عدة شروط .

معادلة المحل الهندسي هي تلك المعادلة التي تتحقق من أجل احداثيات كل نقطة من نقط المحل الهندسي ولا تتحقق من أجل أي نقطة أخرى .

ويمكن تمثيل المحل الهندسي بثلاثة أنواع من المعادلات :

(a) المعادلة الديكارتية . وهي التي تحوي الاحداثيات x و y .

(b) المعادلة القطبية . وهي التي تحوي الاحداثيات القطبية θ و r .

(c) المعادلات الوسيطية . وفيها يتم التعبير عن x و y أو r و θ بدلالة متغير مستقل ثالث t مثلاً نسميه **الوسيط** .

79. تحويل الاحداثيات

لتحويل معادلة منحنٍ من جملة إحداثيات في x و y إلى جملة احداثية أخرى في x', y' ، نعوض قيمة كل متغير بدلالة المتغيرين الآخرين في الجملة الجديدة .

(a) الجملة الديكارتية : المحاور القديمة موازية للمحاور الجديدة

بفرض أن احداثيات المبدأ الجديد بالنسبة للمحاور القديمة هي (h,k) فإن

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

(b) الجملة الديكارتية : المبدأ القديم منطبق على الجديد والمحور x' يصنع زاوية θ مع المحور x ، عندئذٍ

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{cases}$$

(c) الجملة الديكارتية : المحاور القديمة غير موازية للجديدة ، والمبد الجديد يقع في (h,k) بالنسبة للمحاور القديمة .

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta + h \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta + k \end{cases}$$

80. المستقيم (الخط المستقيم)

يمكن أن نكتب معادلة أي مستقيم وفقاً للمعطيات التي نعرفها كما يلي :

(a) ميل المستقيم m ويقطع من المحور y طولاً b

$$y = m x + b$$

(b) ميل المستقيم m ويمر من النقطة (x_1,y_1)

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

(c) يمر من النقطتين (x_2,y_2) و (x_1,y_2)

$$\frac{y - y_1}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_2}{x_2 - x_1}$$

(d) يقطع من المحور ox طولاً a ومن المحور y طولاً b

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 1$$

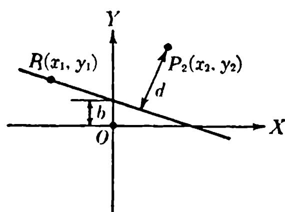
(e) **الشكل الناظمي** . بُعد المبدأ O عن المستقيم هو p ، و α هي الزاوية التي يصنعها العمود من O على المستقيم مع المحور x .

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$

(f) **الشكل العام** .

$$Ax + By + C = 0$$

ميل المستقيم هنا هو $-(A / B)$.



للانتقال من الشكل العام إلى الشكل الناظمي نقسم على

$$\pm \sqrt{A^2 + B^2}$$

حيث نأخذ الإشارة المعاكسة لإشارة C عندما $C \neq 0$ ، وتمثل أمثال x و y عندئذٍ جيب وجيب تمام زاوية α.

بعد نقطة $P_2(x_2, y_2)$ **عن المستقيم** $Ax + By + C = 0$ يُعطى بالعلاقة

$$d = \left| \frac{Ax_2 + By_2 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

81. الدائرة (انظر 37)

المعادلة العامة لدائرة مركزها (h,k) ونصف قطرها R هي

$$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$$

82. القطع المخروطي

هو المنحني الذي ترسمه نقطة P تتحرك في المستوي بحيث تبقى النسبة e (**التباعد المركزي**) بين بعدها عن نقطة ثابتة F (**المِحرق أو البؤرة**) وبعدها عن مستقيم ثابت (**الدليل**) يساوي مقداراً ثابتاً . فإذا كانت d بعد المحرق عن الدليل وكان F منطبقاً على المبدأ O فإن

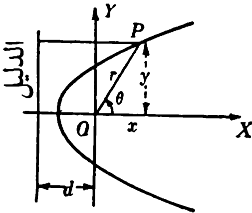
$$x^2+y^2=e^2(d+x)^2$$
$$r=\frac{de}{1-e\cos\theta}$$

ويتغير شكل المنحني بحسب e :

(i) $e=1$ قطع مكافىء .

(ii) $e>1$ قطع زائد .

(iii) $e<1$ قطع ناقص .

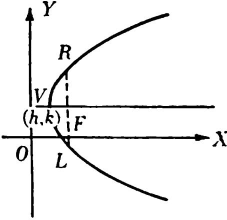


83. القطع المكافىء (انظر 39) $e = 1$.

(a) ذروة القطع في النقطة (h,k) ومحور القطع يوازي OX

$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

يبين الشكل حالة $a > 0$.



(b) ذروة القطع في (h,k) ومحور القطع يوازي OY

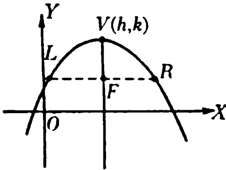
$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

يبين الشكل القطع عندما $a < 0$.

بعد الذروة عن المحرق = $a = VF$

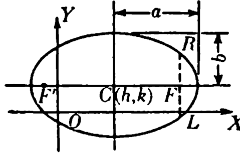
بعد الذروة عن الدليل = a

الوتر العمودي المحرقي = $4a = LR$.



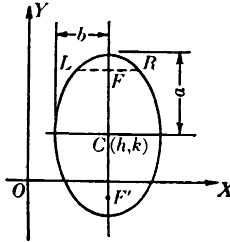
84. القطع الناقص (انظر 38) $e < 1$.

(a) مركز القطع في النقطة (h,k) والمحور الكبير يوازي OX



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

(b) مركز القطع في النقطة (h,k) والمحور الكبير يوازي OY



$$\frac{(y-b)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

المحور الكبير = $2a$ المحور الصغير = $2b$

بعد المركز عن كلٍ من المحرقين هو $\sqrt{a^2 - b^2}$

بعد المركز عن كلٍ من الدليلين هو a / e

التباعد المركزي = $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

الوتر العمودي المحرقي = $L R = \dfrac{2 b^2}{a}$

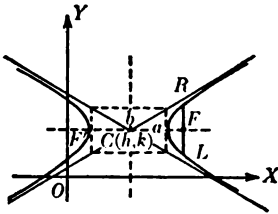
مجموع بعدي أي نقطة P من القطع عن المحرقين هو

$$P F' + P F = 2 a$$

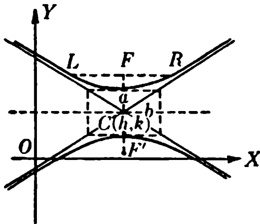
85. القطع الزائد $e > 1$

(a) مركز القطع في النقطة (h,k) والمحور القاطع للقطع يوازي OX وميلا المستقيمين المقاربين $\pm b / a$ (انظر الشكل) عندئذٍ فالمعادلة هي

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$



(b) مركز القطع في (h,k) والمحور القاطع يوازي OY وميلا المستقيمين المقاربين $\pm a / b$ (الشكل)



المحور المستعرض (أي البعد بين الذروتين) = $2a$

المحور المرافق = $2b$

بعد المركز عن كلٍ من المحرقين = $\sqrt{a^2+b^2}$

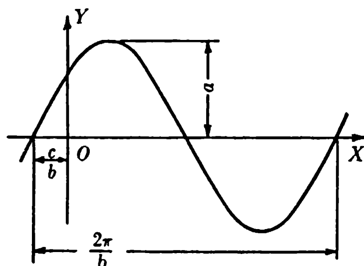
بعد المركز عن كلٍ من الدليلين = a/e

الفرق بين بعدي كل نقطة من القطع عن المحرقين = $2a$

التباعد المركزي = $e = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

الوتر العمودي المحرقي = $LR = \dfrac{2b^2}{a}$

86. المنحني الجيبي



$$y = a \sin (bx + c)$$

$$y = a \cos (bx + c')$$

$$= a \sin (bx + c), \text{ where } c = c' + \frac{\pi}{2}$$

$$y = p \sin bx + q \cos bx = a \sin (bx + c)$$

حيث $c = \tan^{-1} \dfrac{q}{p}$, $a = \sqrt{p^2+q^2}$

a **السعة** = الارتفاع الأعظمي للموجة

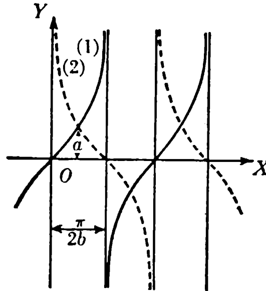
$\frac{2\pi}{b}$ = **طول الموجة** = بعد أي نقطة من الموجة عن النقطة المماثلة لها في الموجة التالية .

$\frac{-c}{b}$ = x = **الطور** وهو النقطة على المحور x التي يبدأ عندها نصف الموجة الموجب .

87. المنحنيات المثلثية

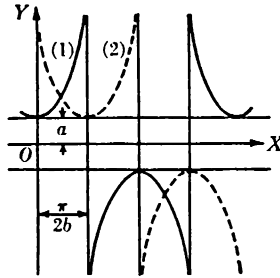
(1) $y = a \tan bx$ أو $x = \frac{1}{b} \tan^{-1} \frac{y}{a}$

(2) $y = a \cot bx$ أو $x = \frac{1}{b} \cot^{-1} \frac{y}{a}$

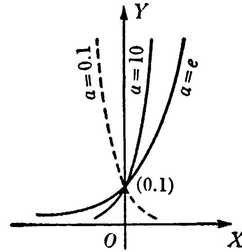


(1) $y = a \sec bx$ أو $x = \frac{1}{b} \sec^{-1} \frac{y}{a}$

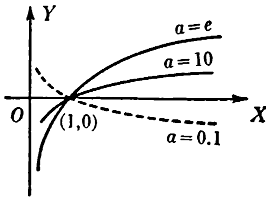
(2) $y = a \csc bx$ أو $x = \frac{1}{b} \csc^{-1} \frac{y}{a}$



88. المنحنيات اللوغاريتمية والأسية

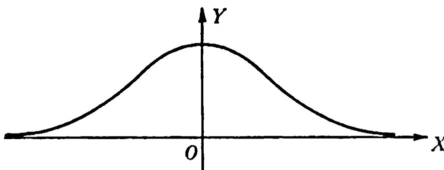


$y = a^x$ أو $x = \log_a y$



$y = \log_a x$ أو $x = a^y$

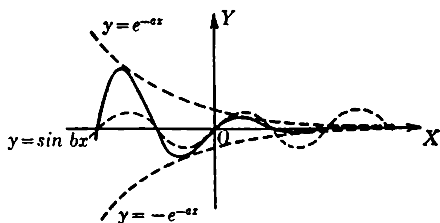
89. منحني الاحتمال



$$y = e^{-x^2}$$

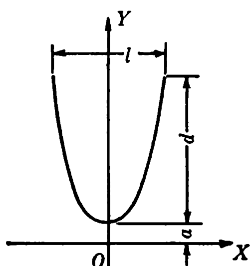
90. الموجة التذبذبية ذات السعة المتناقصة

$$y = e^{-ax} \sin bx$$



91. السليسلة

وهو منحنٍ ينطبق على شكل الحبل المنتظم الوزن والمعلق بين نقطتين دون تأثير قوى خارجية . (انظر 69) .

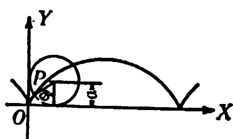


$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-(x/a)}\right)$$

طول القوس = $s = \ell\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2d}{\ell}\right)^2\right]$

وهو طول تقريبي يصح عندما يكون d صغيراً بالمقارنة مع ℓ .

92. الدُّوَيري (السيكلوئيد)



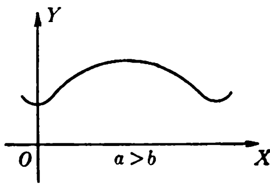
$$\begin{cases} x = a(\phi - \sin\phi) \\ y = a(1 - \cos\phi) \end{cases}$$

وهو المنحني الذي ترسمه نقطة ثابتة على محيط دائرة ، عندما تتدحرج هذه الدائرة على مستقيم ثابت .

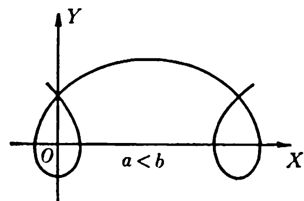
المساحة بين محور السينات وقنطرة واحدة = $3 \pi a^2$

طول قوس قنطرة واحدة = $8a$

93. الدويري المتطاول والدويري المتقاصر



دويري متقاصر



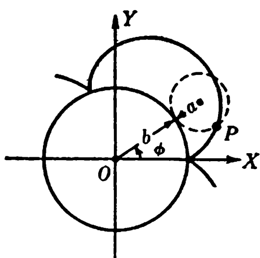
دُويري متطاول

$$\begin{cases} x = a\phi - b \sin \phi \\ y = a - b \cos \phi \end{cases}$$

هو منحنٍ ترسمه نقطة P من مستوي دائرة وتبعد مسافة b عن مركز الدائرة التي نصف قطرها a وذلك عندما تتدحرج الدائرة على مستقيم ثابت في مستويها .

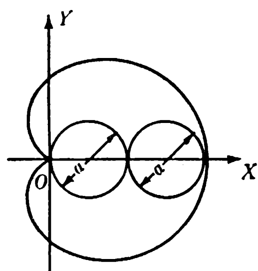
94. الدويري الخارجي

هو منحنٍ ترسمه نقطة على محيط دائرة عندما تتدحرج على دائرة أخرى ثابتة من الخارج .



$$\begin{cases} x = (a+b)\cos\phi - a\cos\left(\frac{a+b}{a}\phi\right) \\ y = (a+b)\sin\phi - a\sin\left(\frac{a+b}{a}\phi\right) \end{cases}$$

95. القلبي (الكارديوئيد)



$$r = a\,(1 + \cos\theta)$$

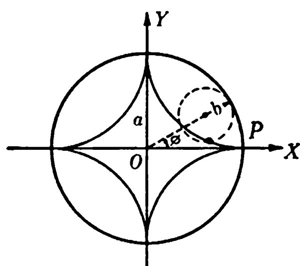
هو دويري خارجي تساوى من أجله نصف قطر الدائرة المتدحرجة مع نصف قطر الدائرة الثابتة .

96. الدويري الداخلي

$$\begin{cases} x = (a-b)\cos\phi + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\phi\right) \\ y = (a-b)\sin\phi - b\sin\left(\frac{a-b}{b}\phi\right) \end{cases}$$

هو منحنٍ ترسمه نقطة ثابتة على محيط دائرة عندما تتدحرج على محيط دائرة ثابتة من الداخل .

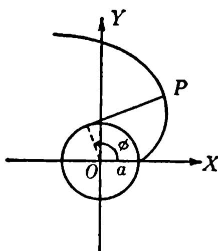
97. الدويري الداخلي ذو الأربع قُرَن



$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$
$$x = a\cos^3\phi \qquad y = a\sin^3\phi$$

هو دويري داخلي خاص يكون فيه نصف قطر الدائرة المتدحرجة مساوياً رُبع نصف قطر الدائرة الثابتة .

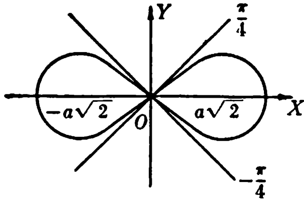
98. ناشر الدائرة



$$\begin{cases} x = a\cos\phi + a\phi\sin\phi \\ y = a\sin\phi - a\phi\cos\phi \end{cases}$$

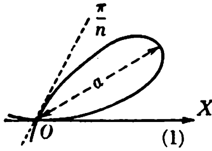
هو منحن ترسمه نهاية حبل مشدود إلى دائرة ثابتة وذلك بينما نحلّ الحبل الملفوف على الدائرة .

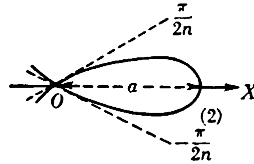
99. ذو العروتين (ليمنيسكات)



$$r^2 = 2\,a^2 \cos 2\,\theta$$

100. الزهرة ذات الـ n وريقة



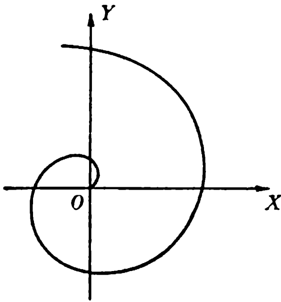


(1) $\quad r = a \sin n\theta$

(2) $\quad r = a \cos n\theta$

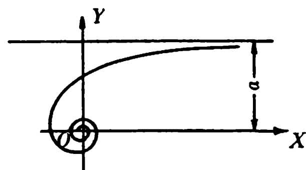
إذا كانت n عدداً فردياً صحيحاً فإنه يوجد n وريقة ، أما إذا كانت n زوجياً فإنه يوجد $2\,n$ وريقة يبين الشكل وريقة واحدة منها .

101. الحلزونات

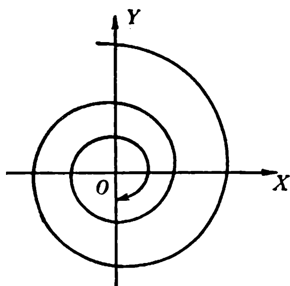


حلزون أرخميدس

$$r = a\,\theta$$



الحلزون الزائدي
$r\,\theta = a$



الحلزون اللوغاريتمي
$r = r^{a\theta}$ أو $a\,\theta = log\, e^{r}$

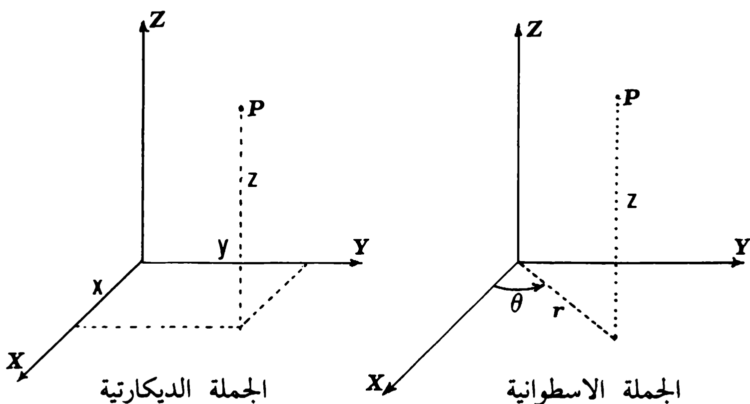
الهندسة التحليلية الفراغية

102. الاحداثيات

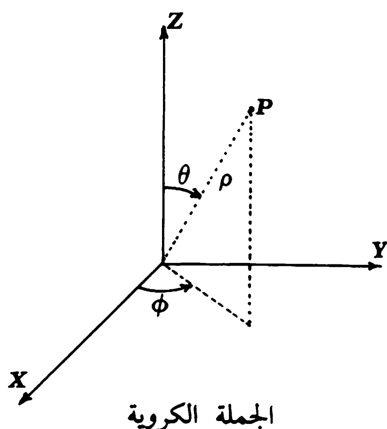
(a) **الجملة الديكارتية.** يتم تعيين وضع النقطة $P\,(x,y,z)$ في الفضاء بثلاثة أعداد $x,\ y,\ z$ تمثل أبعاد النقطة P عن المستويات المتعامدة $YOZ,\ XOZ,\ XOY$ على الترتيب .

ونسمي x **فاصلة** P ، y **ترتيب** P ، z **راقم** P .
ونسمي (x,y,z) الاحداثيات الديكارتية للنقطة P .

(b) **الجملة الاسطوانية.** يتم تعيين النقطة $P\,(r,\theta,z)$ بثلاثة أعداد $r,\ \theta,\ z$ تسمى الاحداثيات الاسطوانية للنقطة P حيث تشير $r,\ \theta$ إلى الاحداثيات القطبية لمسقط P على XOY ويشير z إلى بعد P عن XOY .



(c) **الجملة الكروية (الجغرافيّة)** وفيها يتم تعيين النقطة $P(\rho,\theta,\phi)$ بثلاثة أعداد ρ, θ, ϕ تسمى الاحداثيات الكروية حيث يشير ρ إلى بعد P عن O وتشير θ إلى الزاوية (OZ, OP) مُقاسة من OZ مع عقارب الساعة إلى OP ، أما ϕ فتشير إلى الزاوية (OX, OM) مقاسة من OX إلى OM بعكس عقارب الساعة ، حيث M مسقط P على XOY .



الجملة الكروية

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \quad (x \neq 0) \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \quad (x = 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan\phi = \dfrac{y}{x} \quad (x \neq 0) \\ \cos\theta = \dfrac{z}{\rho} \\ \phi = \dfrac{\pi}{2} \quad (x = 0) \end{cases}$$

103. النقط ، المستقيمات ، المستويات

لدينا في الجملة الديكارتية المتعامدة : **المسافة** بين نقطتين , $P_1 (x_1,y_1,z_1)$

$P_1 (x_2,y_2,z_2)$ هي

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

جيوب تمام توجيه مستقيم هي جيوب تمام الزوايا α, β, γ التي يصنعها المستقيم أو أي موازٍ له مع المحاور الاحداثية . وهكذا فجيوب تمام توجيه القطعة $P_1 P_2$ بالاتجاه من P_1 إلى P_2 هي

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$$

إذا كان $cos\ \alpha : cos\ \beta : cos\ \gamma = a : b : c$ فإن

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

تُعطى الزاوية θ **بين مستقيمين** جيوب تمام توجيهها $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ و

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ بالعلاقة

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

معادلة المستوي هي

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

حيث A, B, C تتناسب مع جيوب تمام توجيه المستقيم العمودي على

المستوي .

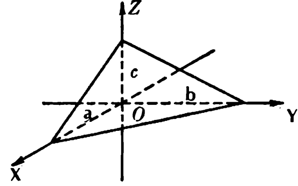
الزاوية بين مستويين هي الزاوية بين الناظمين عليهما .

معادلة مستقيم مار من $P (x_1,y_1,z_1)$ ويوازي المتجه (a,b,c) يعطى

بالعلاقة

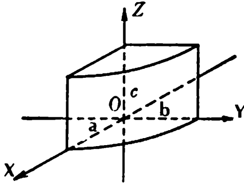
$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

104. بعض الأشكال في الفضاء الثلاثي



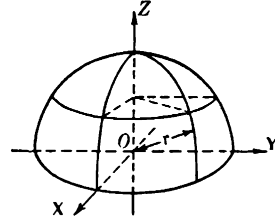
المستوي

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$



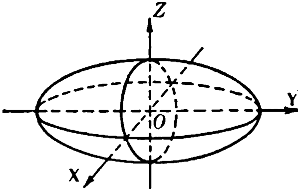
الاسطوانة الناقصية

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



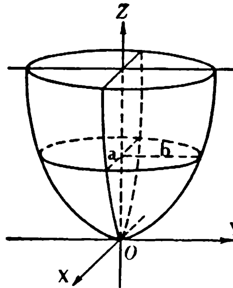
الكرة

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$



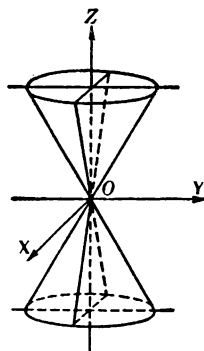
مجسم القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



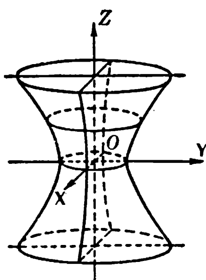
مجسم القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$



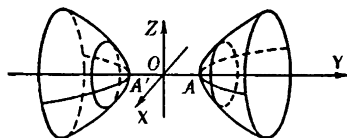
المخروط

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



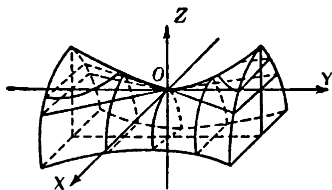
مجسم القطع الزائد
ذو الفرع الواحد

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



مجسم. القطع الزائد ذو الفرعين

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$



مجسم المكافىء الزائدي

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$

5. حساب التفاضل

105. تعاريف

نستخدم الرموز ... ,$f(x), F(x), g(x), \theta(x)$ للإشارة إلى القيم الحقيقية للتوابع ... ,f, F, g, θ على الترتيب عند النقطة x .

أما $f(a)$ و $f(a+h)$ فتمثلان قيمتي التابع $f(x)$ عند $x=a$ و $x=a+h$ على الترتيب . انظر الفصل 9 من أجل تعريف التابع والنهاية والتابع المستمر .

106. المشتق

لتكن $f(x)$ قيمة f عند x . ولنعرِّف $f'(a)$ بالشكل

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

تتعلق القيمة $f'(a)$ عموماً إن وُجدت بالطريقة التي تنتهي فيها h إلى الصفر . فإذا كانت النهاية المعرِّفة لـ $f'(a)$ موجودة ومحدودة ووحيدة ومستقلة عن

الطريقة التي تنتهي فيها h إلى الصفر ، فإننا نقول إن $f(x)$ **قابل للاشتقاق** عند $x = a$ ونسمي $f'(a)$ **مشتق** f **بالنسبة لـ** x **عند** $x = a$. ونرمز عموماً لمشتق f عند أي نقطة x من مجالٍ ما بالرمز $f'(x)$ ، ونقول إن $f(x)$ يقبل الاشتقاق في مجالٍ ما I إذا كان مشتقه مُعرّفاً في كل نقطة من نقط هذا المجال .

ونرمز لمشتق التابع $y = f(x)$ عند x بعدة أشكال نبينها فيما يلي

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = D_x y = y'$$

حيث نسمي $\Delta x = h$ **تزايد** x و $\Delta y = k$ **تزايد** y .

ويتم تعريف المشتقات من مراتب أعلى كما يلي

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx} f'(x) = f''(x) \qquad \text{(المشتق الثاني)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx} f''(x) = f'''(x) \qquad \text{(المشتق الثالث)}$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x) = f^{(n)}(x) \qquad \text{(المشتق النوني)}$$

ونؤكد هنا أن الرمز $f^{(n)}(a)$ يعني قيمة المشتق $f^{(n)}(x)$ عندما $x = a$.

107. علاقات خاصة بالمشتقات

إذا كان $x = f(y)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx / dy}$$

إذا كان $y = f(u)$ و $u = F(x)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

إذا كان $y = \phi(\alpha)$ و $x = f(x)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\phi'(\alpha)}{f'(\alpha)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'(\alpha)\,\phi''(\alpha) - \phi'(\alpha)\,f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^3}$$

108. جدول المشتقات

تُمثِّل u و v في هذا الجدول توابع للمتغير x بينما تمثل a, n, e ثوابت عددية $(e = 2.7183...)$. أما الزوايا جميعها فتُقاس بالراديان .

$$\frac{d}{dx}x = 1 \qquad \frac{d}{dx}a = 0$$

$$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm \cdots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \cdots$$

$$\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{\log_a e}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\log_e u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \log_e a \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} u^v = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \log_e u \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{vers} u = \sin u \frac{du}{dx}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e = 2.71828 \cdots$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx} \qquad \frac{-\pi}{2} \leqq \sin^{-1} u \leqq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx} \qquad 0 \leqq \cos^{-1} u \leqq \pi$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cot^{-1} u = -\frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}, \quad -\pi \leqq \sec^{-1} u < -\frac{\pi}{2},$$
$$0 \leqq \sec^{-1} u < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \csc^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}, \quad -\pi < \csc^{-1} u \leqq -\frac{\pi}{2},$$
$$0 < \csc^{-1} u \leqq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{vers}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{2u - u^2}} \frac{du}{dx} \qquad 0 \leqq \operatorname{vers}^{-1} u \leqq \pi$$

$$\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \coth u = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}^{*}, \quad u > 1$$

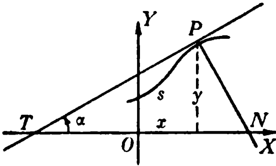
$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\coth^{-1} u = -\frac{1}{u^2-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}^{\dagger}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2+1}}\frac{du}{dx}, \; u > 0$$

109. ميل مماس لمنحنٍ . معادلتا المماس والناظم (في الاحداثيات الديكارتية)



نعرّف ميل المماس للمنحني (الممثل للمعادلة) $y = f(x)$ في النقطة $P(x,y)$ بأنه قيمة مشتق التابع f عند x ونكتب

الميل $$m = \tan\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ويكون الميل في نقطة مُحدَّدة فاصلتها $x = x_1$ هو $m_1 = f'(x_1)$.

أما α فهي الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحني مع محور السينات

معادلة المستقيم المماس للمنحني في النقطة $P_1 (x_1,y_1)$ هي

$$y - y_1 = m_1 (x - x_1)$$

معادلة المستقيم الناظم للمنحني في النقطة $P_1 (x_1,y_1)$ هي

$$y - y_1 = - \frac{1}{m_1} (x - x_1)$$

زاوية تقاطع منحنيين هي الزاوية θ الكائنة بين مماسيّ المنحنيين في نقطة تقاطعهما : ويعطي ظل زاوية التقاطع بالعلاقة

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

حيث m_1, m_2 ميلا المماسين ، وتُعيِّن إشارة θ فيما إذا كانت الزاوية المقصودة هي الحادة أم المنفرجة .

110. التفاضل

ليكن $y = f (x)$ و $f' (x_0)$ مشتق f بالنسبة لـ x عند x_0 ، فإن **تفاضل** x الذي نرمز له بـ dx هو تزايد x أي أن $dx = \Delta x$ ، أما **تفاضل** f عند x_0 الذي نرمز له بـ df فهو $df = f' (x_0) \Delta x$. ونرمز لتفاضل f عند x بعدة أشكال كما يلي :

$$dy = df = f'(x)\ dx = \frac{df(x)}{dx}\ dx = \frac{dy}{dx}\ dx$$

حيث $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

إذا كان $x = f(t)\ ,\ y = \phi(t)$ فإن

$dx = f'(t)\ dt$ و $dy = \phi'(t)\ dt$

وننوه هنا إلى أن جدولاً آخر للتفاضلات على غرار جدول المشتقات 108 ، يمكن أن يُكتب ، وذلك لأن كل قانون للاشتقاق يُقابَل بآخر للتفاضل فمثلاً

$$d(\sin u) = \cos u\ du \qquad d(uv) = u\ dv + v\ du$$

111. القيم العظمى والصغرى لتابع

القيمة العظمى (الصغرى) لتابع $f(x)$ في المجال (a,b) هي قيمة للتابع في نقطة c داخل المجال تكون أكبر (أصغر) من جميع قيم التابع في جميع النقط القريبة من c .

ويتم إيجاد قيم x المرشحة لتكون قيمة عظمى أو صغرى للتابع $y = f(x)$ بحل المعادلة $f'(x) = 0$ أو $f'(x) = \infty$.

إذ ليس من الضروري أن يوافق كل جذر للمعادلة قيمة عظمى أو صغرى للتابع ويتم دراسة قيم التابع الموافقة لهذه الجذور كما يلي :

(i) إذا كان a جذراً للمعادلة $f'(x) = 0$ وكان $f''(a) < 0$ فإن $f(a)$ قيمة عظمى . أما إذا كان $f''(a) > 0$ فإن $f(a)$ قيمة صغرى .

(ii) إذا كان $f'''(a) \neq 0$, $f'(a) = f''(a) = 0$ فإن $f(a)$ ليست قيمة عظمى ولا هي صغرى .

(iii) إذا كان $f^{(4)}(a) \neq 0$, $f'(a) = f''(a) = f'''(a) = 0$ فإن $f(a)$ قيمة عظمى إذا كان $f^{(4)}(a) < 0$ وصغرى إذا كان $f^{(4)}(a) > 0$.

(iv) إذا كانت مرتبة أول مشتق لا ينعدم عند $x = a$ **فردية** فإن $f(a)$ ليست قيمة عظمى ولا هي صغرى .

(v) إذا كانت مرتبة أول مشتق لا ينعدم عند $x = a$ **زوجية** أي $M = f^{(2n)}(a) \neq 0$ فإن $f(a)$ قيمة عظمى إذا كان $M < 0$ وصغرى إذا كان $M > 0$.

ملاحظة . تسمى القيمة العظمى (الصغرى) المعرّفة كما سبق : القيمة **العظمى (الصغرى) المحلّية** . ولكي نوجد القيمة العظمى (الصغرى) **المطلقة** في مجالٍ ما ، فما علينا إلا مقارنة القيم العظمى (الصغرى) المحلية التي حصلنا عليها وانتقاء القيمة العظمى (الصغرى) .

112. نقط الانعطاف لمنحنٍ

نقول إن للمنحني **نقطة انعطاف** في $x = a$ إذا كان $f'(a) = 0$ و $f'(x) < 0$ من أجل مجموعة النقط الواقعة في إحدى جهتي $x = a$ و $f'(x) > 0$ في الجهة الأخرى لـ $x = a$.

ونقول إن **تقعر المنحنى نحو الأعلى** إذا كان $f'(x) > 0$ ، أما إذا كان $f'(x) < 0$ فنقول إن **تقعر المنحني نحو الأسفل** .

113. مشتق طول قوس . نصف قطر التقوس

(انظر 126 ,107 ,75)

ليكن s طول القوس المُقاس على طول المنحني $y = f(x)$ (أو $r = \phi(\theta)$ في الاحداثيات القطبية) من نقطة ثابتة إلى نقطة $P(x,y)$ على المنحني ، ولتكن α زاوية ميل المماس للمنحني في النقطة P عندئذٍ

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}$$

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

$$ds = \sqrt{dr^2+r^2d\theta^2} = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\,dr$$

حيث نجد من العلاقتين $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ أن

$$dx = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta, \quad dy = \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta$$

يُعطى R **نصف قطر تقوس** المنحني $y = f(x)$ في النقطة $P(x,y)$ بالعلاقة

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\{1+[f'(x)]^2\}^{3/2}}{f''(x)} =$$

$$= \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\,\frac{d^2r}{d\theta^2}}$$

أما **التقوس** (K) في النقطة $P(x,y)$ فهو $K = 1/R$.

كما تُعطى **احداثيات مركز تقوس** المنحني $y = f(x)$ الموافق للنقطة (x_1 , y_1) بالعلاقتين :

$$h = x_1 - \frac{f'(x_1)\{1 + [f'(x_1)]^2\}}{f''(x_1)}$$
$$k = y_1 + \frac{1 + [f'(x_1)]^2}{f''(x_1)}$$

114. نظرية القيمة الوسطى

إذا كان التابع $y = f(x)$ مستمراً مع مشتقه $f'(x)$ في المجال (a,b) ، فإنه يوجد قيمة لـ x هي x_1 بين a و b بحيث

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(x_1) \qquad a < x_1 < b$$

نظرية رول . إذا كان $y = f(x)$ مستمراً مع مشتقه في المجال (a,b) وكان $f(a) = f(b) = 0$ فإنه يوجد نقطة واحدة على الأقل x_1 في المجال (a,b) بحيث $f'(x_1) = 0$.

115. ايجاد قيم الأشكال غير المعيَّنة

إذا كان $f(x)$ و $F(x)$ تابعين مستمرين مع مشتقيهما بالنسبة لـ x فإن :

(a) إذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ (أو ∞) وكان

$\lim_{x \to a} F(x) = 0$ (أو ∞) فإن

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

(b) إذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ وكان $\lim_{x \to a} F(x) = \infty$

فإنه يمكن حساب قيمة $\lim_{x \to a} [f(x) F(x)]$ بكتابة

$$f(x) F(x) = \frac{f(x)}{1 / F(x)}$$

ثم تطبيق البند **(a)** .

(c) إذا كان $\lim_{x \to a} F(x) = \infty$, $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

فإن حساب $\lim_{x \to a} [f(x) - F(x)]$ يتم بكتابة

$$f(x) - F(x) = \frac{[1/F(x)] - [1/f(x)]}{1/[f(x)\ F(x)]}$$

ثم باستخدام البند (a) .

(d) يتم حساب $\lim_{x \to a} [f(x)^{F(x)}]$ من العلاقة

$$f(x)^{F(x)} = e^{F(x) \log_e f(x)}$$

وذلك عندما ينتهي أحد العاملين في الأس إلى اللانهاية وينتهي الآخر إلى الصفر ، حيث نطبّق عندئذٍ البند (b) .

ونكون بذلك قد حللنا مشكلة حساب أشكال (حالات) عدم التعيين التي نرمز **لها** عادة كما يلي :

$$0 / 0, \ \infty / \infty, \ 0^0, \ 1^\infty, \ \infty^0, \ \infty - \infty$$

116. نظريتا تايلور وماك لوران

ليكن $f(x)$ تابعاً مستمراً ويقبل الاشتقاق من أي مرتبة فإنه يمكن عموماً نشر هذا التابع (أي كتابته بشكل كثير حدود أو سلسلة) وفق ما نسميه **سلسلة تايلور** :

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

حيث a هو عدد تكون من أجله $f(a), f'(a), f''(a), \dots$ محدودة .

فإذا أردنا استخدام السلسلة لحساب القيمة التقريبية لـ f عند نقطة x فإن يجب اختيار a بشكل يكون الفرق $x - a$ صغيراً جداً ، وعندئذٍ يكفي أخذ عدد قليل من حدود السلسلة لحساب القيمة التقريبية لـ $f(x)$.

ويكون الباقي بعد أخذ n حداً مساوياً لـ

$R_n = f^{(n)}(x_1)(x-a)^n / n!$ حيث x_1 تقع بين a و x .

ويعطي R_n عادة حدود الخطأ المرتكب في التقريب عند أخذ n حداً . أما $n!$ فهو

$$n! = \lfloor n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$$

إذا كان $a=0$ نحصل على ما نسميه **سلسلة ماك لوران** .

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$+ f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

117. السلاسل (المتسلسلات)

نقدم فيما يلي سلاسل تايلور أو ماك لوران لبعض التوابع ، ونشير بجوار بعض السلاسل إلى منطقة (مجال) تقارب السلسلة ، أي قيم x التي تنتهي من أجلها R_n إلى الصفر عندما تنتهي n إلى ∞ ، وهذا يؤكد أن أي عدد من الحدود التي نأخذها من السلسلة يصلح كتقريب للتابع ، كما أن زيادة عدد الحدود المأخوذة يؤدي إلى زيادة دقة التقريب . أما إذا لم نُشِر إلى مجال تقارب السلسلة فذلك يعني أنها تتقارب من أجل أي قيمة محدودة لـ x .

وننوه أخيراً أن $n! = 1 . 2 . 3 .... n$ وأن

$\log_e u \equiv \log u$ (انظر 186) .

(a) سلسلة ثنائي الحد

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \cdots \qquad x^2 < a^2$$

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فإن السلسلة تتكون من $n+1$ حداً فقط . ويكون عدد حدود السلسلة لا نهائياً فيما عدا ذلك .

$$(a-bx)^{-1} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^3x^3}{a^3}\cdots\right) \qquad b^2x^2 < a^2$$

(b) السلاسل الأسية واللوغاريتمية والمثلثية

نستخدم فيما يلي $\log u \equiv \log_e u$. من أجل القيم الرئيسية للتوابع المعاكسة انظر 60 .

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$a^x = 1 + x\log a + \frac{(x\log a)^2}{2!} + \frac{(x\log a)^3}{3!} + \cdots \qquad a > 0$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots$$

$$\log x = (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots \qquad 0 < x \leqq 2$$

$$\log x = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \cdots \qquad x > \frac{1}{2}$$

$$\log x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right] \quad x > 0$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad -1 < x \leqq 1$$

$$\log(a+x) = \log a + 2\left[\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5 + \cdots\right] \qquad a > 0,\ -a < x < +\infty$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right) \qquad x^2 < 1$$

$$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{x}\right)^7 + \cdots\right] \qquad x^2 > 1$$

$$\log\left(\frac{x+1}{x}\right) = 2\left[\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3(2x+1)^3} + \frac{1}{5(2x+1)^5} + \cdots\right] \qquad (2x+1)^2 > 1$$

$$\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad x^2 < 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots \qquad x^2 < \frac{\pi^2}{4}$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad x^2 < 1$$

$$\tan^{-1} x = \begin{cases} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots & x^2 < 1 \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots & x > 1 \end{cases}$$

$$\log|\sin x| = \log|x| - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \cdots \qquad x^2 < \pi^2$$

$$\log \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - \cdots \qquad x^2 < \frac{\pi^2}{4}$$

$$\log|\tan x| = \log|x| + \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} + \frac{62x^6}{2835} + \cdots \qquad x^2 < \frac{\pi^2}{4}$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} - \frac{3x^6}{6!} + \cdots$$

$$e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{6!} + \cdots\right)$$

$$e^{\tan x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{9x^4}{4!} + \frac{37x^5}{5!} + \cdots \qquad x^2 < \frac{\pi^2}{4}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \cdots \qquad x^2 < \frac{\pi^2}{4}$$

$$\sinh^{-1} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad x^2 < 1$$

$$\sinh^{-1} x = \log 2x + \frac{1}{2}\frac{1}{2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{4x^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{6x^6}\cdots \qquad x > 1$$

$$\cosh^{-1} x = \log 2x - \frac{1}{2}\frac{1}{2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{4x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{6x^6} - \cdots \qquad x > 1$$

$$\tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad x^2 < 1$$

118. المشتقات الجزئية . التفاضلات

إذا كان $z = f(x,y)$ تابعاً لمتغيرين ، فإن مشتق z بالنسبة لـ x (بفرض y ثابت) . يسمى **المشتق الجزئي الأول لـ** z بالنسبة لـ x ويرمز له بـ $\partial z / \partial x$. ونسمي مشتق z بالنسبة لـ y (بفرض x ثابت) المشتق الجزئي الأول لـ z بالنسبة لـ y ويرمز له بـ $\partial z / \partial y$.

وبصورة مشابهة إذا كان $z = f(x,y,z,...)$ فإن مشتق z بالنسبة لـ x وافتراض أن $y, u, ...$ ثوابت يسمى المشتق الأول لـ z بالنسبة لـ x ويرمز له بـ $\partial z / \partial x$. ويمكن تعريف المشتق الجزئي الثاني بالنسبة للمتغيرات بالأسلوب نفسه ونعبر عن ذلك كما يلي :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

إذا كان $z = f(x,y,z,...,u)$ وكانت $x, y, ..., u$ توابع لمتغير وحيد t فإن

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u}du$$

إذا كان $F(x,y,z,...,u)$ فإن

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u}du = 0.$$

119. السطوح . المنحنيات في الفضاء

(انظر الهندسة التحليلية 97 و 98) . معادلة **المستوي المماس** للسطح

$F(x,y,z) = 0$ في نقطة (x_1,y_1,z_1) على السطح هي

$$(x - x_1)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 + (y - y_1)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 + (z - z_1)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 = 0$$

حيث $(\partial F / \partial x)_1$ هي قيمة $\partial F / \partial x$ في النقطة (x_1,y_1,z_1)

وهكذا . . . .

معادلتا **الناظم** على السطح في النقطة (x_1,y_1,z_1) هما

$$\frac{x - x_1}{(\partial F/\partial x)_1} = \frac{y - y_1}{(\partial F/\partial y)_1} = \frac{z - z_1}{(\partial F/\partial z)_1}$$

جيوب تمام توجيه الناظم على السطح في النقطة (x_1,y_1,z_1) تتناسب مع

المقادير

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1$$

ليكن المنحني الفضائي الممثل بالمعادلات

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

فإن جيوب تمام توجيه المستقيم المماس للمنحني في أي نقطة منه تتناسب مع

$$dx , dy , dz \quad \text{أو} \quad \frac{dx}{dt} , \frac{dy}{dt} , \frac{dz}{dt}$$

تُعطى معادلتا المستقيم المماس للمنحني في نقطة (x_1, y_1, z_1) منه بالشكل

$$\frac{x - x_1}{(dx/dt)_1} = \frac{y - y_1}{(dy/dt)_1} = \frac{z - z_1}{(dz/dt)_1}$$

حيث $(dx/dt)_1$ هي قيمة dx/dt عند (x_1, y_1, z_1)

وهكذا . . . . .

6. حساب التكامل

120. تعريف التكامل غير المحدد

نقول إن $F(x)$ هو **تكامل غير محدد لـ** $f(x)$ إذا كان مشتق $F(x)$ هو $f(x)$ أو إذا كان تفاضل $F(x)$ هو $f(x)\,dx$ وبالرموز نكتب

$$F(x) = \int f(x)\,dx \quad \text{إذا} \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \text{أو} \quad dF(x) = f(x)\,dx$$

وبصورة عامة نكتب $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ حيث C ثابت اختياري .

121. نظريات أساسية في التكاملات . جدول التكاملات المختصر

u و v فيما يلي توابع لـ x ، أما b, a و C فهي ثوابت .

كما نأخذ القيم الرئيسية من أجل التوابع المعاكسة (انظر 60) .

عندما ترد $\log N$ في كل ما يأتي ، فإننا نعني بها $\log |N|$ عندما $N < 0$.

1. $\int df(x) = f(x) + C$

2. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$

3. $\int 0\,dx = C$

4. $\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

5. $\int (u \pm v)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$

6. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

7. $\int \frac{u\,dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx$

8. $\int f(y)\,dx = \int \frac{f(y)\,dy}{dy/dx}$

9. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $\qquad n \neq -1$

10. $\int \frac{du}{u} = \log_e u + C,\ u > 0$ $\qquad \log_e |u| + C$ $\qquad u \neq 0$

11. $\int e^u\,du = e^u + C$

12. $\int b^u\,du = \frac{b^u}{\log_e b} + C$ $\qquad b > 0,\ b \neq 1$

13. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

14. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

15. $\int \tan u\,du = \log_e \sec u + C = -\log_e \cos u + C$

16. $\int \cot u\, du = \log_e \sin u + C = -\log_e \csc u + C$

17. $\int \sec u\, du = \log_e (\sec u + \tan u) + C$

$$= \log_e \tan \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

18. $\int \csc u\, du = \log_e (\csc u - \cot u) + C = \log_e \tan \frac{u}{2} + C$

19. $\int \sin^2 u\, du = \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} \sin u \cos u + C$

20. $\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \sin u \cos u + C$

21. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$

22. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$

23. $\int \tan^2 u\, du = \tan u - u + C$

24. $\int \cot^2 u\, du = -\cot u - u + C$

25.* $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$

26. $$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \begin{cases} \frac{1}{2a} \log_e \frac{u-a}{u+a} + C = -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} + C & u^2 > a^2 \\ \frac{1}{2a} \log_e \frac{a-u}{a+u} + C = -\frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C & u^2 < a^2 \end{cases}$$

27. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \begin{cases} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C & a > 0 \\ \sin^{-1} \frac{u}{|a|} + C & |a| \neq 0 \end{cases}$$

28. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \log_e (u + \sqrt{u^2 \pm a^2})\dagger + C$

29.* $\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1} \frac{a-u}{a} + C$

30. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C = \frac{1}{a} \cos^{-1} \frac{a}{u} + C$

31. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \log_e \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}\dagger}{u} + C$

32. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{u}{a}\right) + C$

33. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{1}{2} [u\sqrt{u^2 \pm a^2}$
$\pm a^2 \log_e (u + \sqrt{u^2 \pm a^2})]\dagger + C$

34. $\int \sinh u\, du = \cosh u + C$

35. $\int \cosh u\, du = \sinh u + C$

36. $\int \tanh u\, du = \log_e (\cosh u) + C$

37. $\int \coth u\, du = \log_e (\sinh u) + C$

38. $\int \operatorname{sech} u\, du = \sin^{-1} (\tanh u) + C$

39. $\int \operatorname{csch} u\, du = \log_e \left(\tanh \frac{u}{2}\right) + C$

---

* نأخذ $a>0$ في الصيغ 25-32 وفي الملاحظة † .

† $\log_e \frac{u + \sqrt{u^2 + a^2}}{a} = \sinh^{-1} \frac{u}{a}$ $\qquad \log_e \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} = \operatorname{sech}^{-1} \frac{u}{a}$

$\log_e \frac{u + \sqrt{u^2 - a^2}}{a} = \cosh^{-1} \frac{u}{a}$ $\qquad \log_e \frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u} = \operatorname{csch}^{-1} \frac{u}{a}$

40. $\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$

41. $\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$

122. تعريف التكامل المُحَدَّد

ليكن $f(x)$ مستمراً في المجال المغلق من $x = a$ إلى $x = b$. نقسم هذا المجال إلى n من الأجزاء المتساوية بالنقط $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ بحيث $\Delta x = (b - a) / n$. عندئذٍ فالتكامل المحدد للتابع $f(x)$ بالنسبة لـ x في المجال المذكور يُعطى بالعلاقة

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} [f(a)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x]$$
$$= \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث $F(x)$ تابع مشتقه هو $f(x)$. ونسمي a و b **حدّي التكامل** .

123. القيم التقريبية للتكامل المحدد

تُعطى القيم التقريبية للتكامل المحدد المعرّف أعلاه بالقواعد الواردة في 41 ، حيث $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ هي قيم التابع $f(x)$ الموافقة لـ $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ على الترتيب و $h = (b - a) / n$.

124. بعض النظريات الأساسية

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)\, dx$$

$$\int_a^b k f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$ إذا كان k ثابتاً

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)\, f(x_1)$$ حيث تقع x_1 بين a و b

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^b f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^c f(x)\, dx + \int_c^{\infty} f(x)\, dx$$

إذا كانت $x = b \neq a$ نقطة شاذة لـ $f(x)$ (كأن ينتهي $f(x)$ إلى ∞ عندما $x \to b$) فإن

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{e\to 0} \int_a^{b-e} f(x)\, dx$$

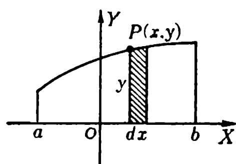
القيمة الوُسطى للتابع $f(x)$ في المجال (a,b) هي

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

بعض تطبيقات التكامل المحدد

125. المساحة في مستوٍ

نعرّف المساحة المحدَّدة بالمنحني $y = f(x)$ والمستقيمات $x = a, x = b,$ $y = 0$ بالعلاقة



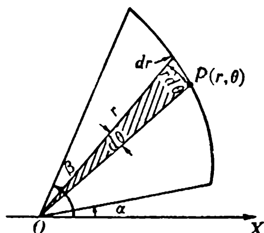
$$dA = f(x)\, dx \qquad A = \int_a^b f(x)\, dx$$

بشرط أن يحافظ y على إشارة ثابتة من أجل جميع قيم x بين النقطتين a و b .

إن المساحة المحدَّدة بالمنحني $r = f(\theta)$ ونصفي القطرين المتجهين $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ هي

$$dA = \frac{1}{2} r^2\, d\theta \qquad A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2\, d\theta$$

126. طول قوس



(انظر 133) يُعطى طول قوس المنحني المستوي $f(x,y) = 0$ من النقطة (a,c) إلى النقطة (b,d) بالعلاقة

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

فإذا كان المنحني مُعرَّفاً بالمعادلتين $x = f(t), y = g(t)$ فإن طول قوس هذا المنحني من $t = a$ إلى $t = b$ هو

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

أما إذا أعطي المنحني بالمعادلة $r = f(\theta)$ فإن

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + 1}\, dr$$

127. حساب الحجم بالمقاطع المتوازية

إذا كان المستوي العمودي على المحور x في النقطة $(x,0,0)$ يقطع مجسماً بمقطع مساحته $A(x)$ فإن حجم جزء المجسم بين $x = a$ و $x = b$ هو

$$\int_a^b A(x)\, dx$$

128. حجم المجسم الدوراني

إن حجم المجسم الدوراني الذي يولّده جزء المنحني $y = f(x)$ بين $x = a$ و $x = b$ عندما يدور

(a) حول المحور x هو

$$\pi \int_a^b y^2 \, dx$$

(b) حول المحور y هو $\pi \int_c^d x^2 \, dy$ حيث c و d قيمتان لـ y موافقتان للقيمتين a و b .

129. مساحة سطح دوراني

إن مساحة سطح مجسم دوراني يولده المنحني $y = f(x)$ بين $x = a$ و $x = b$ عندما يدور

(a) حول المحور x هو

$$2 \pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} \, dy$$

(b) حول المحور y هو

$$2 \theta \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} \, dy$$

130. المساحة المستوية باستخدام التكامل المضاعف

(a) الاحداثيات الديكارتية القائمة

$$A = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} dy\, dx \qquad \text{أو} \qquad \int_c^d \int_{\xi(y)}^{\Psi(y)} dx\, dy$$

(b) الاحداثيات القطبية

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} r\, dr\, d\theta \qquad \text{أو} \qquad \int_{r_1}^{r_2} \int_{\phi_1(r)}^{\phi_2(r)} r\, d\theta\, dr$$

131. الحجوم بواسطة التكامل المضاعف

إذا كان $z = f(x,y)$ و V هو الحجم المطلوب فإن

$$V = \int_a^b \int_{\phi(x)}^{\Psi(x)} f(x,y)\, dy\, dx \qquad \text{أو} \qquad \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

132. الحجوم بواسطة التكامل الثلاثي (انظر 102)

(a) الاحداثيات الديكارتية القائمة

$$V = \iiint dx\, dy\, dz$$

(b) الاحداثيات الاسطوانية

$$V = \iiint r\, dr\, d\theta\, dz$$

(c) الاحداثيات الكروية

$$V = \iiint \rho^2 \sin\phi\, d\theta\, d\phi\, d\rho$$

حيث يجب وضع حدود التكامل وإجراء المكاملة . ويمكن الحصول على صيغ مختلفة عند تغيير ترتيب حدود المكاملة . وتعطى مساحة السطح المعين بالمعادلة $z = f(x,y)$ بالعلاقة

$$A = \iint \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dy\, dx$$

حيث يجب وضع حدود التكامل واجراء المكاملة .

ملاحظة : يجب وضع حدود التكامل المناسبة في كل الصيغ التالية .

133. الكتلة

إن كتلة جسم كثافته δ هي

$$m = \int dm$$

وتعطى dm بإحدى العبارات التالية

$$\delta\, dA \;,\; \delta\, ds \;,\; \delta\, dV \;,\; \delta\, dS$$

حيث dA عنصر مساحة ، ds عنصر طول قوس ، dV عنصر حجمي ، dS عنصر سطحي . (انظر 125 حتى 132) .

134. الكثافة

إذا كانت δ كثافة متغيرة أو ثابتة وكانت $\bar{\delta}$ الكثافة المتوسطة لجسم حجمه V فإن

$$\bar{\delta} = \frac{\int \delta \, dV}{\int dV}$$

135. العزم

المقادير M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} تمثل عزوم كتلة m بالنسبة للمستويات الاحداثية yz, xy, xy على الترتيب . وتعطى هذه المقادير بالعلاقات

$$M_{yz} = \int x \, dm, \; M_{xz} = \int y \, dm, \; M_{xy} = \int z \, dm$$

136. المركز المتوسط لكتلة أو مركز الثقالة

تُعطى احداثيات مركز الثقالة (x,y,z) لكتلة m بالعلاقات

$$\bar{x} = \frac{\int x \, dm}{\int dm}, \; \bar{y} = \frac{\int y \, dm}{\int dm}, \; \bar{z} = \frac{\int z \, dm}{\int dm}$$

حيث x, y, z تشير إلى احداثيات مركز ثقالة العنصر dm .

137. مركز ثقالة عدة كتل

تُعطى فاصلة مركز الثقالة $\bar{x}$ لعدة كتل $m_1, m_2, \ldots, m_n$ مراكز ثقالتها

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ بالعلاقة

$$\bar{x} = \frac{m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + \cdots + m_n\bar{x}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

ويمكن كتابة صيغ مماثلة من أجل $\bar{z}$, $\bar{y}$.

138. عزم العطالة (العزم الثاني)

تعطى عزوم العطالة I للأشكال المختلفة كما يلي :

(a) عزوم عطالة منحنٍ مستوٍ حول المحور x والمحور y والمبدأ بالعلاقات

$$I_x = \int y^2\,ds, \quad I_y = \int x^2\,ds, \quad I_0 = \int (x^2 + y^2)\,ds$$

(b) عزم عطالة مساحة مستوية حول المحور ox والمحور oy والمبدأ بالعلاقات

$$I_x = \int y^2\,dA, \quad I_y = \int x^2\,dA, \quad I_0 = \int (x^2 + y^2)\,dA$$

(c) عزم عطالة جسم كتلته m حول المستويات $yz,\ xz,\ xy$ والمحاور . . . . بالعلاقات

$$I_{yz} = \int x^2\,dm,\ I_{xz} = \int y^2\,dm,\ I_{xy} = \int z^2\,dm,\ I_x = I_{xz} + I_{xy},\ \text{etc.}$$

138 a. نظرية المحاور المتوازية

ليكن L مستقيماً في الفضاء و L_g مستقيماً موازياً لـ L ماراً من مركز ثقالة

جسم كتلته m .

لنفرض أن d هو البعد بين هذين المستقيمين فإن

$$I_L = I_{Lg} + d^2 m$$

حيث I_L و I_{Lg} هما عزما عطالة الجسم حول المستقيمين L و L_g على الترتيب .

139. نصف قطر التدويم

ليكن I عزم عطالة كتلة m فإن نصف قطر التدويم K يعطى بالعلاقة $I = m K^2$.

ويمكن كتابة صيغ مشابهة من أجل المساحات والحجوم والأطوال .

إذا كانت $k_1, k_2, ..., k_n$ أنصاف أقطار تدويم الكتل (المساحات ، . . .) $m_1, m_2, ..., m_n$ بالنسبة لمستقيم أو مستوٍ ، فإن نصف قطر تدويم هذه الكتل K بالنسبة لذلك المستقيم أو المستوي يعطى بالعلاقة

$$K^2 = \frac{m_1 k_1{}^2 + m_2 k_2{}^2 + \cdots + m_n k_n{}^2}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

140. العمل (الشغل)

يعطى مقدار العمل المنجز عند تحريك جُسيم من $s = a$ إلى $s = b$ بواسطة قوة F بالعلاقة

$$W = \int_{s=a}^{s=b} F_s \, ds \qquad dW = F_s \, ds$$

حيث F_s هي مركبة القوة F باتجاه الحركة وهي تابعة لـ s .

141. الضغط

إن مقدار الضغط P على مساحة عمودية على سطح سائل ومغموسة به بين العمقين a و b هو

$$P = \int_{y=a}^{y=b} wly\, dy \qquad dp = wly\, dy$$

حيث ω هو وزن السائل في واحدة الحجم ، y هو عمق شريط عنصري مساحيّ أفقي عن سطح السائل ، ℓ هو طول الشريط الأفقي لعنصر المساحة معبراً عنه بدلالة y .

142. مركز الضغط

يُعطى y مركز الضغط على مساحة عمودية على سطح سائل وبين العمقين a و b بالعلاقة

$$\overline{y} = \frac{\int_{y=a}^{y=b} ydp}{\int_{y=a}^{y=b} dp}$$

حيث dp معطاة في 141 .

7. جدول التكاملات

العمليات الأساسية البسيطة

134. مكاملة $\int R(x)\,dx$ ، **حيث** $R(x)$ **تابع كسري في** x .

اكتب $R(x)$ بشكل كسر صورته (بسطه) كثير حدود ومخرجه (مقامه) كثير حدود أيضاً . فإذا كان الكسر **غير نظامي** أي أعلى درجة في الصورة $\geqq$ أعلى درجة في المخرج ، فإننا نحوّل هذا الكسر إلى **كسر نظامي** (أعلى درجة في الصورة أصغر من أعلى درجة في المخرج) وذلك بتقسيم الصورة على المخرج حيث نحصل على كثير حدود $Q(x)$ سهل المكاملة ونحصل على كسر نظامي $P(x)$. لمكاملة $P(x)$ نفرقه إلى كسور جزئية نكامل كلاً منها على حدة .

ولتفريق $P(x) = f(x) / \psi(x)$ نكتب $\psi(x)$ بالشكل

$$\psi(x) = (x - a)^p (x - b)^q (x - c)^r \cdots$$

حيث $a, b, c, \ldots$ مختلفة . ثم نسعى لإيجاد ثوابت $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2,$ باستخدام توحيد الكسور والمطابقة بحيث

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_p}{(x-a)^p} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_q}{(x-b)^q} + \cdots$$

ويمكن مكاملة الحدود في الطرف الثاني باستخدام العلاقتين

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^t} = \frac{-1}{(t-1)(x-\alpha)^{t-1}}, t > 1, \int \frac{dx}{x-\alpha} = \log(x-\alpha)$$

إذا كانت أمثال $f(x), \psi(x)$ حقيقية وكانت بعض أو كل جذور المعادلة $\psi(x) = 0$ تخيلية فإن ذلك يقودنا إلى مقادير تخيلية . ولكي نتجنب ذلك ، فإننا نكتب الكسور الموافقة لكل جذرين تخيليين مترافقين مضاعفين λ مرة بدلالة $x^2 + \alpha x + \beta$ على النحو التالي

$$\frac{D_1 x + E_1}{x^2 + \alpha x + \beta} + \frac{D_2 x + E_2}{(x^2 + \alpha x + \beta)^2} + \cdots + \frac{D_\lambda x + E_\lambda}{(x^2 + \alpha x + \beta)^\lambda}$$

كما نكتب الكسور الموافقة لجذر a مضاعف p مرة بالشكل

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_p}{(x-a)^p}$$

حيث $D_1, D_2, \ldots, E_1, E_2, \ldots$ ثوابت يتم تعيينها بالمطابقة ، كما أن حل المعادلة $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ هما الجذران المترافقان .

وتتم مكاملة الكسور الأخيرة بالعودة إلى الصيغ 140 حتى 156 .

144. مكاملة التوابع الصمّاء

إذا لم نستطع اكتشاف طريقة سهلة لمكاملة التوابع الصماء بحسب صيغة هذه التوابع نلجأ عادة إلى **تحويل المتغير** x للانتقال بالتكامل إلى تكامل كسري ويتم ذلك وفق القواعد التالية :

نفرض في كل مايلي أن $R(u,v)$ هو تابع كسري في u و v .

(a) $\int R[x, (ax+b)^{1/n}]\, dx,$ نضع $ax + b = y^n$ فيؤول التكامل إلى تكامل تابع كسري في y . (انظر 143) .

(b) $\int R[x, (x^2+bx+c)^{1/2}]\, dx,$ نضع $(x^2+bx+c)^{1/2} = z - x,$ فنحصل على تكامل كسري في z ونتابع كما في 143 .

(c) $\int R(\sin x, \cos x)\, dx,$ نضع $\tan \frac{x}{2} = t$ حيث ينتج أن

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2\, dt}{1+t^2}$$

ويؤول ذلك إلى حساب تكامل كسري في t ونتابع كما في 143 .

145. مكاملة عبارات تحتوي على $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ $\sqrt{a^2 - x^2}$

عند ظهور هذه العبارات فإننا نستخدم التحويلات المناسبة التالية :

(a) نضع $x = a \sin t$ من أجل $\sqrt{a^2 - x^2}$

(b) نضع $x = a \sec t$ من أجل $\sqrt{x^2 - a^2}$

(c) نضع $x = a \tan t$ من أجل $\sqrt{x^2 + a^2}$

146. العبارات المثلثية

إن المتطابقات الواردة في 58 تسهِّل مكاملة التوابع التي تحوي على التوابع المثلثية ، وفي حالة فشلنا في إجراء المكاملة نطبق (c) من 144 .

147. المكاملة بالتجزئة

وهي طريقة هامة في المكاملة تعتمد على إمكانية تحويل العبارة $f(x)\,dx$ إلى تابع $u(x)$ وتفاضل لتابع آخر $v(x)$ بصورة مناسبة أي

$$\int f(x)\,dx = \int u(x)\,d\,[\,v(x)\,]$$

ثم استخدام العلاقة الأساسية

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

حيث نقوم بالانتقال من مكاملة $\int u\,dv$ إلى مكاملة $\int v\,du$ التي نفترضها ممكنة وسهلة ، فإذا لم يكن الأمر كذلك فعلينا تغيير اختيار $u(x)$ و $v(x)$ في التكامل المطلوب حسابه .

148. جدول التكاملات غير المحدّدة (انظر 121)

لقد حذفنا في هذا الجدول **ثابت المكاملة** C **الذي يجب أن يضاف إلى نتيجة كل تكامل** . يمثل x أي متغير و u أي تابع لـ x .

أما $a, b, \ldots$ فهي ثوابت اختيارية ، كما أن $log_e u \equiv log u$ ما لم نذكر غير ذلك . جميع الزوايا بالراديان . نأخذ القيم الرئيسية في العلاقات العكسية (انظر 60) فمثلاً $sin^{-1} x$ تعني $Sin^{-1} x$ ، كما نعبّر بالجذر $\sqrt{\ }$ عن القيمة الموجبة حيث تعني

$$t = \sqrt{x^2 - a^2}$$

القيمة الموجبة لـ t . كلما ورد في الجدول $log N$ فإننا نعني $log | N |$ عندما $N < 0$ و $log N$ عندما $N > 0$. فعندما نكتب

$$\int [1 / (ax + b)] dx = (1 / a) log (ax + b)$$

فإننا نعني

$$\int [1 / (ax + b)] \, dx = (1 / a) \log_e | ax + b | + C$$

عبارات تحوي $(ax + b)$

42. $$\int (ax + b)^n \, dx = \frac{1}{a(n + 1)} (ax + b)^{n+1} \qquad n \neq -1$$

43. $$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \log_e (ax + b)$$

44. $$\int \frac{dx}{(ax + b)^2} = - \frac{1}{a(ax + b)}$$

45. $$\int \frac{dx}{(ax + b)^3} = - \frac{1}{2a(ax + b)^2}$$

46. $$\int x(ax + b)^n \, dx = \frac{1}{a^2(n + 2)} (ax + b)^{n+2} - \frac{b}{a^2(n + 1)} (ax + b)^{n+1} \qquad n \neq -1, -2$$

47. $$\int \frac{x \, dx}{ax + b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \log (ax + b)$$

48. $$\int \frac{x \, dx}{(ax + b)^2} = \frac{b}{a^2(ax + b)} + \frac{1}{a^2} \log (ax + b)$$

49. $\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^3} = \frac{b}{2a^2(ax+b)^2} - \frac{1}{a^2(ax+b)}$

50. $\int x^2(ax+b)^n\,dx$

$$= \frac{1}{a^3}\left[\frac{(ax+b)^{n+3}}{n+3} - 2b\frac{(ax+b)^{n+2}}{n+2} + b^2\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}\right]$$

$n \neq -1,\ -2,\ -3$

51. $\int \frac{x^2\,dx}{ax+b}$

$$= \frac{1}{a^3}\left[\frac{1}{2}(ax+b)^2 - 2b(ax+b) + b^2 \log(ax+b)\right]$$

52. $\int \frac{x^2\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^3}\left[ax+b - 2b\log(ax+b) - \frac{b^2}{ax+b}\right]$

53. $\int \frac{x^2\,dx}{(ax+b)^3} = \frac{1}{a^3}\left[\log(ax+b) + \frac{2b}{ax+b} - \frac{b^2}{2(ax+b)^2}\right]$

54. $\int x^m(ax+b)^n\,dx$

$$= \frac{1}{a(m+n+1)}\left[x^m(ax+b)^{n+1} - mb\int x^{m-1}(ax+b)^n\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{m+n+1}\left[x^{m+1}(ax+b)^n + nb\int x^m(ax+b)^{n-1}\,dx\right]$$

$m > 0,\ m+n+1 \neq 0$

55. $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\log\frac{x}{ax+b}$

56. $\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\log\frac{ax+b}{x}$

57. $\int \frac{dx}{x^3(ax+b)} = \frac{2ax-b}{2b^2x^2} + \frac{a^2}{b^3}\log\frac{x}{ax+b}$

58. $$\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} - \frac{1}{b^2}\log\frac{ax+b}{x}$$

59. $$\int \frac{dx}{x(ax+b)^3} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{ax+2b}{ax+b}\right)^2 + \log\frac{x}{ax+b}\right]$$

60. $$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} = -\frac{b+2ax}{b^2x(ax+b)} + \frac{2a}{b^3}\log\frac{ax+b}{x}$$

61. $$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}$$

62. $$\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2}\sqrt{(ax+b)^3}$$

63. $$\int x^2\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(15a^2x^2-12abx+8b^2)\sqrt{(ax+b)^3}}{105a^3}$$

64. $$\int x^3\sqrt{ax+b}\,dx$$
$$= \frac{2(35a^3x^3-30a^2bx^2+24ab^2x-16b^3)\sqrt{(ax+b)^3}}{315a^4}$$

65. $$\int x^n\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{a^{n+1}}\int u^2(u^2-b)^n\,du \qquad u=\sqrt{ax+b}$$

66. $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int\frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$

67. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}$$

68. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$$

69. $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(3a^2x^2-4abx+8b^2)}{15a^3}\sqrt{ax+b}$$

70. $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(5a^3x^3 - 6a^2bx^2 + 8ab^2x - 16b^3)}{35a^4}\sqrt{ax+b}$$

71. $$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a^{n+1}}\int (u^2 - b)^n\,du \qquad u = \sqrt{ax+b}$$

72. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \qquad b > 0$$

73. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \sqrt{\dfrac{ax+b}{-b}} & b < 0 \\ \dfrac{-2}{\sqrt{b}} \tanh^{-1} \sqrt{\dfrac{ax+b}{b}} & b > 0 \end{cases}$$

74. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$

75. $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{2bx^2} + \frac{3a\sqrt{ax+b}}{4b^2x} + \frac{3a^2}{8b^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$

76. $$\int \frac{dx}{x^n(ax+b)^m} = -\frac{1}{b^{m+n-1}}\int \frac{(u-a)^{m+n-2}\,du}{u^m} \qquad u = \frac{ax+b}{x}$$

77. $$\int (ax+b)^{\pm(n/2)}\,dx = \frac{2(ax+b)^{(2\pm n)/2}}{a(2 \pm n)}$$

78. $$\int x(ax+b)^{\pm(n/2)}\,dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{(ax+b)^{(4\pm n)/2}}{4 \pm n} - \frac{b(ax+b)^{(2\pm n)/2}}{2 \pm n}\right]$$

79. $$\int \frac{dx}{x(ax+b)^{n/2}} = \frac{1}{b}\int \frac{dx}{x(ax+b)^{(n-2)/2}} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{(ax+b)^{n/2}}$$

80. $$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2x^m\sqrt{ax+b}}{(2m+1)a} - \frac{2mb}{(2m+1)a}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{ax+b}}$$

81. $$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{ax+b}}$$
$$= \frac{-\sqrt{ax+b}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}}$$

82. $$\int \frac{(ax+b)^{n/2}}{x}\,dx = a\int (ax+b)^{(n-2)/2}\,dx + b\int \frac{(ax+b)^{(n-2)/2}}{x}\,dx$$

83. $$\int \frac{dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad}\log\frac{cx+d}{ax+b} \qquad bc-ad \neq 0$$

84. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^2(cx+d)}$$
$$= \frac{1}{bc-ad}\left(\frac{1}{ax+b} + \frac{c}{bc-ad}\log\frac{cx+d}{ax+b}\right) \qquad bc-ad \neq 0$$

85. $$\int (ax+b)^n(cx+d)^m\,dx = \frac{1}{(m+n+1)a}\left[(ax+b)^{n+1}(cx+d)^m \right.$$
$$\left. - m(bc-ad)\int (ax+b)^n(cx+d)^{m-1}\,dx\right]$$

86. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^n(cx+d)^m} = \frac{-1}{(m-1)(bc-ad)}\left[\frac{1}{(ax+b)^{n-1}(cx+d)^{m-1}} \right.$$
$$\left. + a(m+n-2)\int \frac{dx}{(ax+b)^n(cx+d)^{m-1}}\right], \; m>1,\, n>0,\, bc-ad \neq 0$$

87. $$\int \frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^m}\,dx = -\frac{1}{(m-1)(bc-ad)}\left[\frac{(ax+b)^{n+1}}{(cx+d)^{m-1}} + (m-n-2)a\int \frac{(ax+b)^n\,dx}{(cx+d)^{m-1}}\right] = \frac{-1}{(m-n-1)c}\left[\frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^{m-1}} + n(bc-ad)\int \frac{(ax+b)^{n-1}}{(cx+d)^m}\,dx\right]$$

88. $$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad}\left[\frac{b}{a}\log(ax+b) - \frac{d}{c}\log(cx+d)\right] \qquad bc-ad \neq 0$$

89. $$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad}\left[-\frac{b}{a(ax+b)} - \frac{d}{bc-ad}\log\frac{cx+d}{ax+b}\right] \qquad bc-ad \neq 0$$

90. $$\int \frac{cx+d}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2}{3a^2}(3ad-2bc+acx)\sqrt{ax+b}$$

91. $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{cx+d}\,dx = \frac{2\sqrt{ax+b}}{c} - \frac{2}{c}\sqrt{\frac{ad-bc}{c}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{c(ax+b)}{ad-bc}} \qquad c>0,\ ad>bc$$

92. $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{cx+d}\,dx = \frac{2\sqrt{ax+b}}{c} + \frac{1}{c}\sqrt{\frac{bc-ad}{c}}\log\frac{\sqrt{c(ax+b)}-\sqrt{bc-ad}}{\sqrt{c(ax+b)}+\sqrt{bc-ad}} \qquad c>0,\ bc>ad$$

93. $$\int \frac{dx}{(cx+d)\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{\sqrt{c}\sqrt{ad-bc}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{c(ax+b)}{ad-bc}} \qquad c>0,\ ad>bc$$

94. $\int \frac{dx}{(cx+d)\sqrt{ax+b}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}\sqrt{bc-ad}} \log \frac{\sqrt{c(ax+b)} - \sqrt{bc-ad}}{\sqrt{c(ax+b)} + \sqrt{(bc-ad}}, c > 0, bc > ad$$

عبارات تحوي $ax^2 + c$, $ax^n + c$, $x^2 \pm p^2$, $p^2 - x^2$

95. $\int \frac{dx}{p^2+x^2} = \frac{1}{p}\tan^{-1}\frac{x}{p}$ or $-\frac{1}{p}\cot^{-1}\frac{x}{p}$

96. $\int \frac{dx}{p^2-x^2} = \frac{1}{2p}\log\frac{p+x}{p-x}$ or $\frac{1}{p}\tanh^{-1}\frac{x}{p}$

97. $\int \frac{dx}{ax^2+c} = \frac{1}{\sqrt{ac}}\tan^{-1}\left(x\sqrt{\frac{a}{c}}\right)$ $\quad a, c > 0$

98.
$$\int \frac{dx}{ax^2+c} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-ac}}\log\frac{x\sqrt{a}-\sqrt{-c}}{x\sqrt{a}+\sqrt{-c}} & a > 0, c < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-ac}}\log\frac{\sqrt{c}+x\sqrt{-a}}{\sqrt{c}-x\sqrt{-a}} & a < 0, c > 0 \end{cases}$$

99. $\int \frac{dx}{(ax^2+c)^n} = \frac{1}{2(n-1)c}\frac{x}{(ax^2+c)^{n-1}}$

$$+ \frac{2n-3}{2(n-1)c}\int\frac{dx}{(ax^2+c)^{n-1}} \quad n > 1$$

100. $\int x(ax^2+c)^n\,dx = \frac{1}{2a}\frac{(ax^2+c)^{n+1}}{n+1}$ $\quad n \neq -1$

101. $\int \frac{x}{ax^2+c}\,dx = \frac{1}{2a}\log(ax^2+c)$

102. $\int \frac{dx}{x(ax^2+c)} = \frac{1}{2c}\log\frac{x^2}{ax^2+c}$

103. $\int \frac{dx}{x^2(ax^2+c)} = -\frac{1}{cx} - \frac{a}{c}\int\frac{dx}{ax^2+c}$

104. $\int \frac{x^2\,dx}{ax^2+c} = \frac{x}{a} - \frac{c}{a}\int\frac{dx}{ax^2+c}$

105. $\int \frac{x^n\,dx}{ax^2+c} = \frac{x^{n-1}}{a(n-1)} - \frac{c}{a}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{ax^2+c} \qquad n \neq 1$

106. $\int \frac{x^2\,dx}{(ax^2+c)^n} = -\frac{1}{2(n-1)a}\,\frac{x}{(ax^2+c)^{n-1}}$

$$+\frac{1}{2(n-1)a}\int \frac{dx}{(ax^2+c)^{n-1}}$$

107. $\int \frac{dx}{x^2(ax^2+c)^n} = \frac{1}{c}\int \frac{dx}{x^2(ax^2+c)^{n-1}} - \frac{a}{c}\int \frac{dx}{(ax^2+c)^n}$

108. $\int \sqrt{x^2 \pm p^2}\,dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2 \pm p^2} \pm p^2 \log (x + \sqrt{x^2 \pm p^2})]$

109. $\int \sqrt{p^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{p^2 - x^2} + p^2 \sin^{-1} \frac{x}{p}\right)$

110. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm p^2}} = \log (x + \sqrt{x^2 \pm p^2})$

111. $\int \frac{dx}{\sqrt{p^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{p} \qquad = \qquad -\cos^{-1} \frac{x}{p}$

112. $\int \sqrt{ax^2 + c}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{ax^2 + c}$

$$+\frac{c}{2\sqrt{a}}\log (x\sqrt{a} + \sqrt{ax^2 + c}) \qquad a > 0$$

113. $\int \sqrt{ax^2 + c}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{ax^2 + c} + \frac{c}{2\sqrt{-a}}\sin^{-1}\left(x\sqrt{\frac{-a}{c}}\right)$

$a < 0$

114. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\log (x\sqrt{a} + \sqrt{ax^2 + c}) \qquad a > 0$

115. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\sin^{-1}\left(x\sqrt{\frac{-a}{c}}\right) \qquad a < 0$

116. $\int x\sqrt{ax^2 + c}\,dx = \frac{1}{3a}(ax^2 + c)^{3/2}$

117. $\int x^2\sqrt{ax^2+c}\,dx = \frac{x}{4a}\sqrt{(ax^2+c)^3} - \frac{cx}{8a}\sqrt{ax^2+c}$
$- \frac{c^2}{8\sqrt{a^3}}\log\left(x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+c}\right) \qquad a>0$

118. $\int x^2\sqrt{ax^2+c}\,dx = \frac{x}{4a}\sqrt{(ax^2+c)^3} - \frac{cx}{8a}\sqrt{ax^2+c}$
$- \frac{c^2}{8a\sqrt{-a}}\sin^{-1}\left(x\sqrt{\frac{-a}{c}}\right) \qquad a<0$

119. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+c}} = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+c}$

120. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax^2+c}} = \frac{x}{a}\sqrt{ax^2+c} - \frac{1}{a}\int\sqrt{ax^2+c}\,dx$

121. $\int \frac{\sqrt{ax^2+c}}{x}\,dx = \sqrt{ax^2+c} + \sqrt{c}\log\frac{\sqrt{ax^2+c}-\sqrt{c}}{x}$
$c>0$

122. $\int \frac{\sqrt{ax^2+c}}{x}\,dx = \sqrt{ax^2+c} - \sqrt{-c}\tan^{-1}\frac{\sqrt{ax^2+c}}{\sqrt{-c}}$
$c<0$

123. $\int \frac{dx}{x\sqrt{p^2\pm x^2}} = -\frac{1}{p}\log\frac{p+\sqrt{p^2\pm x^2}}{x}$

124. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-p^2}} = \frac{1}{p}\cos^{-1}\frac{p}{x} = -\frac{1}{p}\sin^{-1}\frac{p}{x}$

125. $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+c}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\log\frac{\sqrt{ax^2+c}-\sqrt{c}}{x} \qquad c>0$

126. $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+c}} = \frac{1}{\sqrt{-c}}\sec^{-1}\left(x\sqrt{-\frac{a}{c}}\right) \qquad c<0$

127. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax^2+c}} = -\frac{\sqrt{ax^2+c}}{cx}$

128. $$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax^2+c}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{ax^2+c}}{na} - \frac{(n-1)c}{na}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{ax^2+c}} \qquad n>0$$

129. $$\int x^n\sqrt{ax^2+c}\,dx = \frac{x^{n-1}(ax^2+c)^{3/2}}{(n+2)a} - \frac{(n-1)c}{(n+2)a}\int x^{n-2}\sqrt{ax^2+c}\,dx \qquad n>0$$

130. $$\int \frac{\sqrt{ax^2+c}}{x^n}\,dx = -\frac{(ax^2+c)^{3/2}}{c(n-1)x^{n-1}} - \frac{(n-4)a}{(n-1)c}\int \frac{\sqrt{ax^2+c}}{x^{n-2}}\,dx \qquad n>1$$

131. $$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{ax^2+c}} = -\frac{\sqrt{ax^2+c}}{c(n-1)x^{n-1}} - \frac{(n-2)a}{(n-1)c}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{ax^2+c}} \qquad n>1$$

132. $$\int (ax^2+c)^{3/2}\,dx = \frac{x}{8}(2ax^2+5c)\sqrt{ax^2+c} + \frac{3c^2}{8\sqrt{a}}\log\left(x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+c}\right) \qquad a>0$$

133. $$\int (ax^2+c)^{3/2}\,dx = \frac{x}{8}(2ax^2+5c)\sqrt{ax^2+c} + \frac{3c^2}{8\sqrt{-a}}\sin^{-1}\left(x\sqrt{\frac{-a}{c}}\right) \qquad a<0$$

134. $$\int \frac{dx}{(ax^2+c)^{3/2}} = \frac{x}{c\sqrt{ax^2+c}}$$

135. $$\int x(ax^2+c)^{3/2}\,dx = \frac{1}{5a}(ax^2+c)^{5/2}$$

136. $$\int x^2(ax^2+c)^{3/2}\,dx = \frac{x^3}{6}(ax^2+c)^{3/2} + \frac{c}{2}\int x^2\sqrt{ax^2+c}\,dx$$

137. $\int x^n(ax^2+c)^{3/2}\,dx$

$$= \frac{x^{n+1}(ax^2+c)^{3/2}}{n+4} + \frac{3c}{n+4}\int x^n\sqrt{ax^2+c}\;dx$$

138. $\int \frac{x\,dx}{(ax^2+c)^{3/2}} = -\frac{1}{a\sqrt{ax^2+c}}$

139. $\int \frac{x^2\,dx}{(ax^2+c)^{3/2}} = -\frac{x}{a\sqrt{ax^2+c}}$

$$+\frac{1}{a\sqrt{a}}\log\left(x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+c}\right) \qquad a>0$$

140. $\int \frac{x^2\,dx}{(ax^2+c)^{3/2}} = -\frac{x}{a\sqrt{ax^2+c}}$

$$+\frac{1}{a\sqrt{-a}}\sin^{-1}\left(x\sqrt{\frac{-a}{c}}\right) \qquad a<0$$

141. $\int \frac{x^3\,dx}{(ax^2+c)^{3/2}} = -\frac{x^2}{a\sqrt{ax^2+c}} + \frac{2}{a^2}\sqrt{ax^2+c}$

142. $\int \frac{dx}{x(ax^n+c)} = \frac{1}{cn}\log\frac{x^n}{ax^n+c}$

143. $\int \frac{dx}{(ax^n+c)^m} = \frac{1}{c}\int\frac{dx}{(ax^n+c)^{m-1}} - \frac{a}{c}\int\frac{x^n\,dx}{(ax^n+c)^m}$

144. $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^n+c}} = \frac{1}{n\sqrt{c}}\log\frac{\sqrt{ax^n+c}-\sqrt{c}}{\sqrt{ax^n+c}+\sqrt{c}} \qquad c>0$

145. $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^n+c}} = \frac{2}{n\sqrt{-c}}\sec^{-1}\sqrt{\frac{-ax^n}{c}} \qquad c<0$

146. $\int x^{m-1}(ax^n+c)^p\,dx$

$$= \frac{1}{m+np}\left[x^m(ax^n+c)^p + npc\int x^{m-1}(ax^n+c)^{p-1}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{cn(p+1)}\left[-x^m(ax^n+c)^{p+1}\right.$$

$$\left.+(m+np+n)\int x^{m-1}(ax^n+c)^{p+1}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{a(m+np)}\left[x^{m-n}(ax^n+c)^{p+1} - (m-n)c\int x^{m-n-1}(ax^n+c)^p\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{mc}\left[x^m(ax^n+c)^{p+1} - (m+np+n)a\int x^{m+n-1}(ax^n+c)^p\,dx\right]$$

147. $$\int \frac{x^m\,dx}{(ax^n+c)^p} = \frac{1}{a}\int \frac{x^{m-n}\,dx}{(ax^n+c)^{p-1}} - \frac{c}{a}\int \frac{x^{m-n}\,dx}{(ax^n+c)^p}$$

148. $$\int \frac{dx}{x^m(ax^n+c)^p} = \frac{1}{c}\int \frac{dx}{x^m(ax^n+c)^{p-1}} - \frac{a}{c}\int \frac{dx}{x^{m-n}(ax^n+c)^p}$$

عبارات تحوي $ax^2 + bx + c$

149. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\log\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \qquad b^2 > 4ac$$

150. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \qquad b^2 < 4ac$$

151. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = -\frac{2}{2ax+b} \qquad b^2 = 4ac$$

152. $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1}} = \frac{2ax+b}{n(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^n} + \frac{2(2n-1)a}{n(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

153. $$\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\log(ax^2+bx+c) - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

154. $$\int \frac{x^2\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2}\log(ax^2+bx+c) + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

155. $$\int \frac{x^n\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)a} - \frac{c}{a}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{ax^2+bx+c} - \frac{b}{a}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{ax^2+bx+c}$$

156. $$\int \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1}} = \frac{-(2c+bx)}{n(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^n} - \frac{b(2n-1)}{n(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

157. $$\int \frac{x^m\,dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1}} = -\frac{x^{m-1}}{a(2n-m+1)(ax^2+bx+c)^n} - \frac{n-m+1}{2n-m+1}\frac{b}{a}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1}} + \frac{m-1}{2n-m+1}\frac{c}{a}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1}}$$

158. $$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)} = \frac{1}{2c}\log\left(\frac{x^2}{ax^2+bx+c}\right) - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

159. $$\int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)} = \frac{b}{2c^2}\log\left(\frac{ax^2+bx+c}{x^2}\right) - \frac{1}{cx} + \left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

160. $$\int \frac{dx}{x^m(ax^2+bx+c)^{n+1}} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}(ax^2+bx+c)^n} - \frac{n+m-1}{m-1}\frac{b}{c}\int \frac{dx}{x^{m-1}(ax^2+bx+c)^{n+1}} - \frac{2n+m-1}{m-1}\frac{a}{c}\int \frac{dx}{x^{m-2}(ax^2+bx+c)^{n+1}}$$

161. $$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{2c(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$

162. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left(2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}\right) \qquad a > 0$$

163. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \sin^{-1} \frac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \qquad a < 0$

164. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a}$

$$- \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

165. $\displaystyle\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{x^{n-1}}{an}\sqrt{ax^2 + bx + c}$

$$- \frac{b(2n - 1)}{2an} \int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} - \frac{c(n - 1)}{an} \int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

166. $\displaystyle\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{2ax + b}{4a}\sqrt{ax^2 + bx + c}$

$$+ \frac{4ac - b^2}{8a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

167. $\displaystyle\int x\sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{(ax^2 + bx + c)^{3/2}}{3a}$

$$- \frac{b}{2a} \int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx$$

168. $\displaystyle\int x^2\sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx = \left(x - \frac{5b}{6a}\right)\frac{(ax^2 + bx + c)^{3/2}}{4a}$

$$+ \frac{5b^2 - 4ac}{16a^2} \int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx$$

169. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}} \log \left(\frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{c}}{x} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right) \quad , \quad c > 0$$

170. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \sin^{-1} \frac{bx+2c}{x\sqrt{b^2-4ac}} \qquad c<0$$

171. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx}} = -\frac{2}{bx}\sqrt{ax^2+bx} \qquad c=0$$

172. $$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{c(n-1)x^{n-1}} + \frac{b(3-2n)}{2c(n-1)}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{a(2-n)}{c(n-1)}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

173. $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = -\frac{2(2ax+b)}{(b^2-4ac)\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad b^2 \neq 4ac$$

174. $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = -\frac{1}{2\sqrt{a^3}(x+b/2a)^2} \qquad b^2 = 4ac$$

عبارات جبرية متنوعة

175. $$\int \sqrt{2px-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[(x-p)\sqrt{2px-x^2} + p^2 \sin^{-1}\frac{x-p}{p}\right]$$

176. $$\int \frac{dx}{\sqrt{2px-x^2}} = \cos^{-1}\frac{p-x}{p}$$

177. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}} = \frac{2}{\sqrt{-ac}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{-c(ax+b)}{a(cx+d)}}$$

أو $$\frac{2}{\sqrt{ac}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{c(ax+b)}{a(cx+d)}}$$

178. $$\int \sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}\,dx = \frac{(2acx+bc+ad)\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}}{4ac} - \frac{(ad-bc)^2}{8ac}\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}}$$

179. $\int \sqrt{\frac{cx + d}{ax + b}}\, dx = \frac{\sqrt{ax + b}\sqrt{cx + d}}{a} + \frac{ad - bc}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax + b}\sqrt{cx + d}}$

180. $\int \sqrt{\frac{x + b}{x + d}}\, dx = \sqrt{x + d}\sqrt{x + b} + (b - d) \log (\sqrt{x + d} + \sqrt{x + b})$

181. $\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\, dx = \sin^{-1} x - \sqrt{1 - x^2}$

182. $\int \sqrt{\frac{p - x}{q + x}}\, dx = \sqrt{p - x}\sqrt{q + x} + (p + q) \sin^{-1} \sqrt{\frac{x + q}{p + q}}$

183. $\int \sqrt{\frac{p + x}{q - x}}\, dx = -\sqrt{p + x}\sqrt{q - x} - (p + q) \sin^{-1} \sqrt{\frac{q - x}{p + q}}$

184. $\int \frac{dx}{\sqrt{x - p}\sqrt{q - x}} = 2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{x - p}{q - p}}$

عبارات تحوي sin a x

185. $\int \sin u\, du = -\cos u$ حيث u هو أي تابع لـ x

186. $\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a} \cos ax$

187. $\int \sin^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$

188. $\int \sin^3 ax\, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + \frac{1}{3a} \cos^3 ax$

189. $\int \sin^4 ax\, dx = \frac{3x}{8} - \frac{3 \sin 2ax}{16a} - \frac{\sin^3 ax \cos ax}{4a}$

190. $\int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\,dx$

n عدد صحيح موجب

191. $\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\log\tan\frac{ax}{2} = \frac{1}{a}\log(\csc ax - \cot ax)$

192. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = \int \csc^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\cot ax$

193. $\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)}\frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}$

$n > 1$ صحيح

194. $\int \frac{dx}{1 \pm \sin ax} = \mp\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right)$

195. $\int \frac{dx}{b + c\sin ax}$

$$= \frac{-2}{a\sqrt{b^2 - c^2}}\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right], \quad b^2 > c^2$$

196. $\int \frac{dx}{b + c\sin ax}$

$$= \frac{-1}{a\sqrt{c^2 - b^2}}\log\frac{c + b\sin ax + \sqrt{c^2 - b^2}\cos ax}{b + c\sin ax}, \quad c^2 > b^2$$

197. $\int \sin ax \sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, \quad a^2 \neq b^2$

198. $\int \sqrt{1 + \sin x}\,dx = \pm 2\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right);$

استخدم إشارة + عندما $(8k-1)\frac{\pi}{2} < x \leqq (8k+3)\frac{\pi}{2}$, وفيما عدا ذلك

- ، k صحيح

199. $\int \sqrt{1 - \sin x}\,dx = \pm 2\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right);$

استخدم إشارة + عندما $(8k + 1)\frac{\pi}{2} \geqq x > (8k - 3)\frac{\pi}{2}$ وفيما عدا ذلك

- ، k صحيح .

عبارات تحوي cos a x

حيث u هو أي تابع لـ x

200. $\int \cos u\, du = \sin u$

201. $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a} \sin ax$

202. $\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$

203. $\int \cos^3 ax\, dx = \frac{1}{a} \sin ax - \frac{1}{3a} \sin^3 ax$

204. $\int \cos^4 ax\, dx = \frac{3x}{8} + \frac{3 \sin 2ax}{16a} + \frac{\cos^3 ax \sin ax}{4a}$

205. $\int \cos^n ax\, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax\, dx$

206. $\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a} \log \tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{a} \log (\tan ax + \sec ax)$

207. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \tan ax$

208. $\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$

صحيح $n > 1$

209. $\int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \tan \frac{ax}{2}$

210. $\int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \cot \frac{ax}{2}$

211. $\int \sqrt{1 + \cos x}\, dx = \pm \sqrt{2} \int \cos \frac{x}{2}\, dx = \pm 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}$

استخدم + عندما $(4k + 1)\pi \geqq x > (4k - 1)\pi$ وفيما عدا ذلك - ، k

صحيح .

212. $\int \sqrt{1 - \cos x}\, dx = \pm\sqrt{2}\int \sin\frac{x}{2}\, dx = \mp 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$

استخدم الإشارات العلوية عندما $4k\pi < x \leqq (4k+2)\pi$, وفيما عدا ذلك السفلية .

213. $\int \frac{dx}{b + c\cos ax}$

$$= \frac{1}{a\sqrt{b^2 - c^2}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{b^2 - c^2}\sin ax}{c + b\cos ax} \qquad b^2 > c^2$$

214. $\int \frac{dx}{b + c\cos ax}$

$$= \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}}\tanh^{-1}\frac{\sqrt{c^2 - b^2}\sin ax}{c + b\cos ax} \qquad c^2 > b^2$$

215. $\int \cos ax \cos bx\, dx$

$$= \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \qquad a^2 \neq b^2$$

عبارات تحوي $\sin a x$. $\cos a x$

216. $\int \sin ax \cos bx\, dx =$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(a-b)x}{a-b} + \frac{\cos(a+b)x}{a+b}\right] \qquad a^2 \neq b^2$$

217. $\int \sin^n ax \cos ax\, dx = \frac{1}{a(n+1)}\sin^{n+1} ax \qquad n \neq -1$

218. $\int \cos^n ax \sin ax\, dx = -\frac{1}{a(n+1)}\cos^{n+1} ax \qquad n \neq -1$

219. $\int \frac{\sin ax}{\cos ax}\, dx = -\frac{1}{a}\log\cos ax$

220. $\int \frac{\cos ax}{\sin ax}\, dx = \frac{1}{a}\log\sin ax$

221. $\int (b + c \sin ax)^n \cos ax \, dx$

$$= \frac{1}{ac(n+1)} (b + c \sin ax)^{n+1} \qquad n \neq -1$$

222. $\int (b + c \cos ax)^n \sin ax \, dx$

$$= -\frac{1}{ac(n+1)} (b + c \cos ax)^{n+1} \qquad n \neq -1$$

223. $\int \frac{\cos ax \, dx}{b + c \sin ax} = \frac{1}{ac} \log (b + c \sin ax)$

224. $\int \frac{\sin ax}{b + c \cos ax} dx = -\frac{1}{ac} \log (b + c \cos ax)$

225. $\int \frac{dx}{b \sin ax + c \cos ax}$

$$= \frac{1}{a\sqrt{b^2 + c^2}} \left[\log \tan \frac{1}{2}\left(ax + \tan^{-1} \frac{c}{b}\right) \right]$$

226. $\int \frac{dx}{b + c \cos ax + d \sin ax} = \frac{-1}{a\sqrt{b^2 - c^2 - d^2}} \sin^{-1} U$

$$U \equiv \left[\frac{c^2 + d^2 + b(c \cos ax + d \sin ax)}{\sqrt{c^2 + d^2}(b + c \cos ax + d \sin ax)} \right]$$

$$\text{or } = \frac{1}{a\sqrt{c^2 + d^2 - b^2}} \log V$$

$$V \equiv \left[\frac{c^2 + d^2 + b(c \cos ax + d \sin ax) + \sqrt{c^2 + d^2 - b^2}(c \sin ax - d \cos ax)}{\sqrt{c^2 + d^2}(b + c \cos ax + d \sin ax)} \right]$$

$$b^2 \neq c^2 + d^2, \; -\pi < ax < \pi$$

227. $\int \frac{dx}{b + c \cos ax + d \sin ax}$

$$= \frac{1}{ab} \left[\frac{b - (c + d) \cos ax + (c - d) \sin ax}{b + (c - d) \cos ax + (c + d) \sin ax} \right], \; b^2 = c^2 + d^2$$

228. $\int \frac{\sin^2 ax \, dx}{b + c \cos^2 ax} = \frac{1}{ac} \sqrt{\frac{b + c}{b}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{b + c}} \tan ax \right) - \frac{x}{c}$

229. $$\int \frac{\sin ax \cos ax\, dx}{b \cos^2 ax + c \sin^2 ax} = \frac{1}{2a(c-b)} \log (b \cos^2 ax + c \sin^2 ax)$$

230. $$\int \frac{dx}{b^2 \cos^2 ax - c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{2abc} \log \frac{b \cos ax + c \sin ax}{b \cos ax - c \sin ax}$$

231. $$\int \frac{dx}{b^2 \cos^2 ax + c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{abc} \tan^{-1} \frac{c \tan ax}{b}$$

232. $$\int \sin^2 ax \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}$$

233. $$\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a} \log \tan ax$$

234. $$\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a}(\tan ax - \cot ax)$$

235. $$\int \frac{\sin^2 ax}{\cos ax}\, dx = \frac{1}{a}\left[-\sin ax + \log \tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

236. $$\int \frac{\cos^2 ax}{\sin ax}\, dx = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \log \tan \frac{ax}{2}\right)$$

237. $$\int \sin^m ax \cos^n ax\, dx = -\frac{\sin^{m-1} ax \cos^{n+1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} ax \cos^n ax\, dx \qquad m, n > 0$$

238. $$\int \sin^m ax \cos^n ax\, dx = \frac{\sin^{m+1} ax \cos^{n-1} ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m ax \cos^{n-2} ax\, dx \qquad m, n > 0$$

239. $$\int \frac{\sin^m ax}{\cos^n ax}\, dx = \frac{\sin^{m+1} ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\sin^m ax}{\cos^{n-2} ax}\, dx \qquad m, n > 0,\ n \neq 1$$

240. $$\int \frac{\cos^n ax}{\sin^m ax}\, dx = \frac{-\cos^{n+1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} + \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{\cos^n ax}{\sin^{m-2} ax}\, dx \qquad m, n > 0,\ m \neq 1$$

241. $$\int \frac{dx}{\sin^m ax \cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \frac{1}{\sin^{m-1} ax \cos^{n-1} ax} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^m ax \cos^{n-2} ax}$$

242. $$\int \frac{dx}{\sin^m ax \cos^n ax} = -\frac{1}{a(m-1)} \frac{1}{\sin^{m-1} ax \cos^{n-1} ax} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} ax \cos^n ax}$$

243. $$\int \frac{\sin^{2n} ax}{\cos ax} dx = \int \frac{(1-\cos^2 ax)^n}{\cos ax} dx$$

(انشر ، قسّم ، استخدم 205)

244. $$\int \frac{\cos^{2n} ax}{\sin ax} dx = \int \frac{(1-\sin^2 ax)^n}{\sin ax} dx$$

(انشر ، قسّم ، استخدم 190)

245. $$\int \frac{\sin^{2n+1} ax}{\cos ax} dx = \int \frac{(1-\cos^2 ax)^n}{\cos ax} \sin ax\, dx$$

(انشر ، قسّم ، استخدم 218)

246. $$\int \frac{\cos^{2n+1} ax}{\sin ax} dx = \int \frac{(1-\sin^2 ax)^n}{\sin ax} \cos ax\, dx$$

(انشر ، قسّم ، استخدم 217)

عبارات تحوي **tan ax** أو **(tan ax = 1 / cot ax)**

247. $$\int \tan u\, du = -\log \cos u \quad \text{or} \quad \log \sec u$$

حيث u هو أي تابع لـ x

248. $$\int \tan ax\, dx = -\frac{1}{a} \log \cos ax$$

249. $$\int \tan^2 ax\, dx = \frac{1}{a} \tan ax - x$$

250. $$\int \tan^3 ax\, dx = \frac{1}{2a} \tan^2 ax + \frac{1}{a} \log \cos ax$$

251. $\int \tan^n ax\, dx = \frac{1}{a(n-1)} \tan^{n-1} ax - \int \tan^{n-2} ax\, dx$

صحيح $n > 1$

252. $\int \cot u\, du = \log \sin u \quad$ or $\quad -\log \csc u$

253. $\int \cot^2 ax\, dx = \int \frac{dx}{\tan^2 ax} = -\frac{1}{a} \cot ax - x$

254. $\int \cot^3 ax\, dx = -\frac{1}{2a} \cot^2 ax - \frac{1}{a} \log \sin ax$

255. $\int \cot^n ax\, dx = \int \frac{dx}{\tan^n ax}$

$$= -\frac{1}{a(n-1)} \cot^{n-1} ax - \int \cot^{n-2} ax\, dx$$ صحيح $n > 1$

256. $\int \frac{dx}{b + c \tan ax} = \int \frac{\cot ax\, dx}{b \cot ax + c}$

$$= \frac{1}{b^2 + c^2} \left[bx + \frac{c}{a} \log (b \cos ax + c \sin ax) \right]$$

257. $\int \frac{dx}{b + c \cot ax} = \int \frac{\tan ax\, dx}{b \tan ax + c}$

$$= \frac{1}{b^2 + c^2} \left[bx - \frac{c}{a} \log (c \cos ax + b \sin ax) \right]$$

258. $\int \frac{dx}{\sqrt{b + c \tan^2 ax}} = \frac{1}{a\sqrt{b - c}} \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{b - c}{b}} \sin ax \right)$

$b > 0\ ,\ b^2 > c^2$

عبارات تحوي $\sec ax = 1/\cos ax$ أو $\csc ax = 1/\sin ax$

259. $\int \sec u\, du = \log (\sec u + \tan u) = \log \tan \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$

حيث u هو أي تابع لـ x

260. $\int \sec ax\, dx = \frac{1}{a} \log \tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$

261. $\int \sec^2 ax\, dx = \frac{1}{a} \tan ax$

262. $\int \sec^3 ax\, dx = \frac{1}{2a}\left[\tan ax \sec ax + \log \tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

263. $\int \sec^n ax\, dx = \frac{1}{a(n-1)} \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax}$

$+ \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} ax\, dx$ صحيح $n > 1$

264. $\int \csc u\, du = \log(\csc u - \cot u) = \log \tan \frac{u}{2}$

265. $\int \csc ax\, dx = \frac{1}{a} \log \tan \frac{ax}{2}$

266. $\int \csc^2 ax\, dx = -\frac{1}{a} \cot ax$

267. $\int \csc^3 ax\, dx = \frac{1}{2a}\left(-\cot ax \csc ax + \log \tan \frac{ax}{2}\right)$

268. $\int \csc^n ax\, dx = -\frac{1}{a(n-1)} \frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax}$

$+ \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} ax\, dx$ صحيح $n > 1$

عبارات تحوي tan ax و sec ax أو csc ax

269. $\int \tan u \sec u\, du = \sec u$ حيث u هو أي تابع لـ x

270. $\int \tan ax \sec ax\, dx = \frac{1}{a} \sec ax$

271. $\int \tan^n ax \sec^2 ax\, dx = \frac{1}{a(n+1)} \tan^{n+1} ax$ $n \neq -1$

272. $\int \tan ax \sec^n ax\, dx = \frac{1}{an} \sec^n ax$ $n \neq 0$

273. $\int \cot u \csc u \, du = -\csc u$

274. $\int \cot ax \csc ax \, dx = -\frac{1}{a} \csc ax$

275. $\int \cot^n ax \csc^2 ax \, dx = -\frac{1}{a(n+1)} \cot^{n+1} ax \qquad n \neq -1$

276. $\int \cot ax \csc^n ax \, dx = -\frac{1}{an} \csc^n ax \qquad n \neq 0$

277. $\int \frac{\csc^2 ax \, dx}{\cot ax} = -\frac{1}{a} \log \cot ax$

عبارات تحوي توابع جبرية ومثلثية

278. $\int x \sin ax \, dx = \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{1}{a} x \cos ax$

279. $\int x^2 \sin ax \, dx = \frac{2x}{a^2} \sin ax + \frac{2}{a^3} \cos ax - \frac{x^2}{a} \cos ax$

280. $\int x^3 \sin ax \, dx$

$$= \frac{3x^2}{a^2} \sin ax - \frac{6}{a^4} \sin ax - \frac{x^3}{a} \cos ax + \frac{6x}{a^3} \cos ax$$

281. $\int x \sin^2 ax \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2}$

282. $\int x^2 \sin^2 ax \, dx = \frac{x^3}{6} - \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{1}{8a^3}\right) \sin 2ax - \frac{x \cos 2ax}{4a^2}$

283. $\int x^3 \sin^2 ax \, dx = \frac{x^4}{8} - \left(\frac{x^3}{4a} - \frac{3x}{8a^3}\right) \sin 2ax$

$$- \left(\frac{3x^2}{8a^2} - \frac{3}{16a^4}\right) \cos 2ax$$

284. $\int x \sin^3 ax \, dx = \frac{x \cos 3ax}{12a} - \frac{\sin 3ax}{36a^2} - \frac{3x \cos ax}{4a} + \frac{3 \sin ax}{4a^2}$

285. $\int x^n \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx$

286. $\int \frac{\sin ax\, dx}{x} = ax - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} - \cdots$

287. $\int \frac{\sin ax\, dx}{x^m} = \frac{-1}{m-1} \frac{\sin ax}{x^{m-1}} + \frac{a}{m-1} \int \frac{\cos ax\, dx}{x^{m-1}}$

288. $\int x \cos ax\, dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{1}{a} x \sin ax$

289. $\int x^2 \cos ax\, dx = \frac{2x}{a^2} \cos ax - \frac{2}{a^3} \sin ax + \frac{x^2}{a} \sin ax$

290. $\int x^3 \cos ax\, dx = \frac{(3a^2x^2 - 6) \cos ax}{a^4} + \frac{(a^2x^2 - 6x) \sin ax}{a^3}$

291. $\int x \cos^2 ax\, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$

292. $\int x^2 \cos^2 ax\, dx = \frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{1}{8a^3}\right) \sin 2ax + \frac{x \cos 2ax}{4a^2}$

293. $\int x^3 \cos^2 ax\, dx = \frac{x^4}{8} + \left(\frac{x^3}{4a} - \frac{3x}{8a^3}\right) \sin 2ax$

$$+ \left(\frac{3x^2}{8a^2} - \frac{3}{16a^4}\right) \cos 2ax$$

294. $\int x \cos^3 ax\, dx = \frac{x \sin 3ax}{12a} + \frac{\cos 3ax}{36a^2} + \frac{3x \sin ax}{4a} + \frac{3 \cos ax}{4a^2}$

295. $\int x^n \cos ax\, dx = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax\, dx,$ n موجب

296. $\int \frac{\cos ax}{x} dx = \log ax - \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} - \cdots$

297. $\int \frac{\cos ax}{x^m} dx = -\frac{1}{m-1} \frac{\cos ax}{x^{m-1}} - \frac{a}{m-1} \int \frac{\sin ax}{x^{m-1}} dx$

عبارات تحوي توابع أسية ولوغاريتمية

298. $\int e^u\, du = e^u$ حيث u هو أي تابع لـ x

299. $\int b^u\,du = \dfrac{b^u}{\log b}$

300. $\int e^{ax}\,dx = \dfrac{1}{a}e^{ax}$ $\qquad \int b^{ax}\,dx = \dfrac{b^{ax}}{a\log b}$

301. $\int xe^{ax}\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2}(ax-1),\quad \int xb^{ax}\,dx = \dfrac{xb^{ax}}{a\log b} - \dfrac{b^{ax}}{a^2(\log b)^2}$

302. $\int x^2e^{ax}\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$

303. $\int x^ne^{ax}\,dx = \dfrac{1}{a}x^ne^{ax} - \dfrac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$ $\qquad$ n موجب

304. $\int x^ne^{ax}\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^{n+1}}\Big[(ax)^n - n(ax)^{n-1} + n(n-1)(ax)^{n-2} - \cdots + (-1)^n n!\Big]$ $\qquad$ n صحيح موجب

305. $\int x^ne^{-ax}\,dx = -\dfrac{e^{-ax}}{a^{n+1}}\Big[(ax)^n + n(ax)^{n-1} + n(n-1)(ax)^{n-2} + \cdots + n!\Big]$ $\qquad$ n صحيح موجب

306. $\int x^nb^{ax}\,dx = \dfrac{x^nb^{ax}}{a\log b} - \dfrac{n}{a\log b}\int x^{n-1}b^{ax}\,dx$ $\qquad$ n موجب

307. $\int \dfrac{e^{ax}}{x}\,dx = \log x + ax + \dfrac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \dfrac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \cdots$

308. $\int \dfrac{e^{ax}}{x^n}\,dx = \dfrac{1}{n-1}\left(-\dfrac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a\int \dfrac{e^{ax}}{x^{n-1}}\,dx\right)$ $\qquad$ $n > 1$ صحيح

309. $\int \dfrac{dx}{b + ce^{ax}} = \dfrac{1}{ab}\Big[ax - \log(b + ce^{ax})\Big]$

310. $\int \dfrac{e^{ax}\,dx}{b + ce^{ax}} = \dfrac{1}{ac}\log(b + ce^{ax})$

311. $\int \dfrac{dx}{be^{ax} + ce^{-ax}} = \dfrac{1}{a\sqrt{bc}}\tan^{-1}\left(e^{ax}\sqrt{\dfrac{b}{c}}\right)$ $\qquad$ b و c موجبان .

312. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$

313. $\int e^{ax} \sin bx \sin cx \, dx$

$$= \frac{e^{ax}\{(b-c)\sin[(b-c)x] + a\cos[(b-c)x]\}}{2[a^2+(b-c)^2]} - \frac{e^{ax}\{(b+c)\sin[(b+c)x] + a\cos[(b+c)x]\}}{2[a^2+(b+c)^2]}$$

314. $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$

315. $\int e^{ax} \cos bx \cos cx \, dx$

$$= \frac{e^{ax}\{(b-c)\sin[(b-c)x] + a\cos[(b-c)x]\}}{2[a^2+(b-c)^2]} + \frac{e^{ax}\{(b+c)\sin[(b+c)x] + a\cos[(b+c)x]\}}{2[a^2+(b+c)^2]}$$

316. $\int e^{ax} \sin bx \cos cx \, dx$

$$= \frac{e^{ax}\{a\sin[(b-c)x] - (b-c)\cos[(b-c)x]\}}{2[a^2+(b-c)^2]} + \frac{e^{ax}\{a\sin[(b+c)x] - (b+c)\cos[(b+c)x]\}}{2[a^2+(b+c)^2]}$$

317. $\int e^{ax} \sin bx \sin(bx+c) \, dx$

$$= \frac{e^{ax}\cos c}{2a} - \frac{e^{ax}[a\cos(2bx+c) + 2b\sin(2bx+c)]}{2(a^2+4b^2)}$$

318. $\int e^{ax} \cos bx \cos(bx+c) \, dx$

$$= \frac{e^{ax}\cos c}{2a} + \frac{e^{ax}[a\cos(2bx+c) + 2b\sin(2bx+c)]}{2(a^2+4b^2)}$$

319. $\int e^{ax} \sin bx \cos(bx+c) \, dx$

$$= -\frac{e^{ax}\sin c}{2a} + \frac{e^{ax}[a\sin(2bx+c) - 2b\cos(2bx+c)]}{2(a^2+4b^2)}$$

320. $\int e^{ax} \cos bx \sin (bx + c)\, dx$

$$= \frac{e^{ax} \sin c}{2a} + \frac{e^{ax}[a \sin (2bx + c) - 2b \cos (2bx + c)]}{2(a^2 + 4b^2)}$$

321. $\int xe^{ax} \sin bx\, dx = \frac{xe^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx)$

$$- \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^2}[(a^2 - b^2) \sin bx - 2ab \cos bx]$$

322. $\int xe^{ax} \cos bx\, dx = \frac{xe^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx)$

$$- \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^2}[(a^2 - b^2) \cos bx + 2ab \sin bx]$$

323. $\int e^{ax} \cos^n bx\, dx = \frac{(e^{ax} \cos^{n-1} bx)(a \cos bx + nb \sin bx)}{a^2 + n^2b^2}$

$$+ \frac{n(n - 1)b^2}{a^2 + n^2b^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} bx\, dx$$

324. $\int e^{ax} \sin^n bx\, dx = \frac{(e^{ax} \sin^{n-1} bx)(a \sin bx - nb \cos bx)}{a^2 + n^2b^2}$

$$+ \frac{n(n - 1)b^2}{a^2 + n^2b^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} bx\, dx$$

325. $\int \log ax\, dx = x \log ax - x$

326. $\int x \log ax\, dx = \frac{x^2}{2} \log ax - \frac{x^2}{4}$

327. $\int x^2 \log ax\, dx = \frac{x^3}{3} \log ax - \frac{x^3}{9}$

328. $\int (\log ax)^2\, dx = x(\log ax)^2 - 2x \log ax + 2x$

329. $\int (\log ax)^n\, dx = x(\log ax)^n - n \int (\log ax)^{n-1}\, dx$ $\qquad$ n موجب

330. $\int x^n \log ax\, dx = x^{n+1}\left[\frac{\log ax}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] \qquad n \neq -1$

331. $\int x^n(\log ax)^m\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\log ax)^m - \frac{m}{n+1}\int x^n(\log ax)^{m-1}\, dx$

332. $\int \frac{(\log ax)^n}{x}\, dx = \frac{(\log ax)^{n+1}}{n+1} \qquad n \neq -1$

333. $\int \frac{dx}{x \log ax} = \log(\log ax)$

334. $\int \frac{dx}{x(\log ax)^n} = -\frac{1}{(n-1)(\log ax)^{n-1}}$

335. $\int \frac{x^n\, dx}{(\log ax)^m} = \frac{-x^{n+1}}{(m-1)(\log ax)^{m-1}} + \frac{n+1}{m-1}\int \frac{x^n\, dx}{(\log ax)^{m-1}}$

$m \neq 1$

336. $\int \frac{x^n\, dx}{\log ax} = \frac{1}{a^{n+1}}\int \frac{e^y\, dy}{y} \qquad y = (n+1)\log ax$

337. $\int \frac{x^n\, dx}{\log ax} = \frac{1}{a^{n+1}}\left[\log|\log ax| + (n+1)\log ax + \frac{(n+1)^2(\log ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(n+1)^3(\log ax)^3}{3 \cdot 3!} + \cdots\right]$

338. $\int \frac{dx}{\log ax} = \frac{1}{a}\left[\log|\log ax| + \log ax + \frac{(\log ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\log ax)^3}{3 \cdot 3!} + \cdots\right]$

339. $\int \sin(\log ax)\, dx = \frac{x}{2}\left[\sin(\log ax) - \cos(\log ax)\right]$

340. $\int \cos(\log ax)\, dx = \frac{x}{2}\left[\sin(\log ax) + \cos(\log ax)\right]$

341. $\int e^{ax}\log bx\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\log bx - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}\, dx$

342. $\int \sin^{-1} ax\,dx = x\sin^{-1} ax + \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2}$

343. $\int (\sin^{-1} ax)^2\,dx = x(\sin^{-1} ax)^2 - 2x + \frac{2}{a}\sqrt{1-a^2x^2}\sin^{-1} ax$

344. $\int x\sin^{-1} ax\,dx = \frac{x^2}{2}\sin^{-1} ax - \frac{1}{4a^2}\sin^{-1} ax + \frac{x}{4a}\sqrt{1-a^2x^2}$

345. $\int x^n\sin^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1-a^2x^2}} \qquad n \neq -1$

346. $\int \frac{\sin^{-1} ax\,dx}{x} = ax + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 3}(ax)^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5}(ax)^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7}(ax)^7 + \cdots \qquad a^2x^2 < 1$

347. $\int \frac{\sin^{-1} ax\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\sin^{-1} ax - a\log\left|\frac{1+\sqrt{1-a^2x^2}}{ax}\right|$

348. $\int \cos^{-1} ax\,dx = x\cos^{-1} ax - \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2}$

349. $\int (\cos^{-1} ax)^2\,dx = x(\cos^{-1} ax)^2 - 2x - \frac{2}{a}\sqrt{1-a^2x^2}\cos^{-1} ax$

350. $\int x\cos^{-1} ax\,dx = \frac{x^2}{2}\cos^{-1} ax - \frac{1}{4a^2}\cos^{-1} ax - \frac{x}{4a}\sqrt{1-a^2x^2}$

351. $\int x^n\cos^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1-a^2x^2}} \qquad n \neq -1$

352. $$\int \frac{\cos^{-1} ax\, dx}{x} = \frac{\pi}{2}\log|ax| - ax - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 3}(ax)^3 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5}(ax)^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7}(ax)^7 - \cdots$$
$$a^2x^2 < 1$$

353. $$\int \frac{\cos^{-1} ax\, dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\cos^{-1} ax + a\log\left|\frac{1+\sqrt{1-a^2x^2}}{ax}\right|$$

354. $$\int \tan^{-1} ax\, dx = x\tan^{-1} ax - \frac{1}{2a}\log(1+a^2x^2)$$

355. $$\int x^n \tan^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{1+a^2x^2}$$
$$n \neq -1$$

356. $$\int \frac{\tan^{-1} ax\, dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\tan^{-1} ax - \frac{a}{2}\log\frac{1+a^2x^2}{a^2x^2}$$

357. $$\int \cot^{-1} ax\, dx = x\cot^{-1} ax + \frac{1}{2a}\log(1+a^2x^2)$$

358. $$\int x^n \cot^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cot^{-1} ax + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{1+a^2x^2}$$
$$n \neq -1$$

359. $$\int \frac{\cot^{-1} ax\, dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\cot^{-1} ax + \frac{a}{2}\log\frac{1+a^2x^2}{a^2x^2}$$

360. $$\int \sec^{-1} ax\, dx = x\sec^{-1} ax - \frac{1}{a}\log(ax + \sqrt{a^2x^2-1})$$

361. $$\int x^n \sec^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sec^{-1} ax \pm \frac{1}{n+1}\int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{a^2x^2-1}}$$
$$n \neq -1$$

استخدم + عندما $\frac{\pi}{2} < \sec^{-1} ax < \pi$; و - عندما

$$0 < \sec^{-1} ax < \frac{\pi}{2}.$$

362. $$\int \csc^{-1} ax\, dx = x\csc^{-1} ax + \frac{1}{a}\log(ax + \sqrt{a^2x^2-1})$$

363. $\int x^n \csc^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \csc^{-1} ax \pm \frac{1}{n+1} \int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{a^2x^2 - 1}}$

$n \neq -1$

استخدم + عندما $0 < \csc^{-1} ax < \frac{\pi}{2}$; و - عندما

$-\frac{\pi}{2} < \csc^{-1} ax < 0.$

ملاحظات حول جداول التكامل

يمكن تطبيق كثير من التكاملات على المتغيرات العقدية بالإضافة إلى المتغيرات الحقيقية . يمكن للتوابع التي نكاملها أن تكون كثيرة التعيين أَوْلَها عدة فروع أو تعاني من انقطاعات ولذا يجب الانتباه إلى ذلك ، وخير وسيلة للتعرف على هذه الحالات هي رسم التوابع التي نكاملها . وكقاعدة عامة ، يجب عدم اجراء المكاملة في مجال يحتوي على نقطة انقطاع أو نقط تفرع . وهكذا لا يمكن إجراء المكاملة $\int (1/x)\, dx$ من قيمة سالبة لـ x إلى قيمة موجبة لأن مجال المكاملة يحتوي على $x = 0$ التي يكون فيها $1/x$ غير معرّف .

التكاملات المحدّدة

364. $$\int_0^\infty \frac{a\, dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ \frac{-\pi}{2} & a < 0 \end{cases}$$

365. $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx = \int_0^1 \left(\log_e \frac{1}{x}\right)^{n-1} dx = \Gamma(n)$

$$\Gamma(n+1) = \begin{cases} n\,\Gamma(n), \text{ if } n > 0 \\ n!, \ (\text{صحيح } n) \end{cases} \qquad \Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(n) = \Pi(n-1) \qquad Z(y) = D_y[\log_e \Gamma(y)]$$

$$Z(1) = -0.5772157 \cdots$$

(انظر 418)

366. $\int_0^\infty z^n x^{n-1} e^{-zx}\, dx = \Gamma(n)$ $\qquad z > 0$

367. $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}\, dx}{(1+x)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

368. $\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ $\qquad 0 < n < 1$

369.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \begin{cases} \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx \\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, & n > -1 \\ \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (n)}\frac{\pi}{2} & (n \text{ صحيح زوجي}) \\ \frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \cdots n} & (n \text{ صحيح فردي}) \end{cases}$$

370. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$

371. $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ ، $\qquad a > 0$

372.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \cos ax}{x}\, dx = \begin{cases} 0, & a < -1 \text{ or } a > 1 \\ \frac{\pi}{4}, & a = -1 \text{ or } a = 1 \\ \frac{\pi}{2}, & -1 < a < 1 \end{cases}$$

373. $\int_0^{\pi} \sin^2 ax\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2 ax\,dx = \frac{\pi}{2}$

374. $\int_0^{\pi/a} \sin ax \cos ax\,dx = \int_0^{\pi} \sin ax \cos ax\,dx = 0$

375. $\int_0^{\pi} \sin ax \sin bx\,dx = \int_0^{\pi} \cos ax \cos bx\,dx = 0 \qquad a \neq b$

376. $\int_0^{\pi} \sin ax \cos bx\,dx = \begin{cases} \dfrac{2a}{a^2 - b^2} & (a-b \text{ فردي}) \\ 0 & (a-b \text{ زوجي}) \end{cases}$

377. $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi a \qquad a < b$

378. $\int_0^{\infty} \cos (x^2)\,dx = \int_0^{\infty} \sin (x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

379. $\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} = \frac{1}{2a}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \qquad a > 0$

380. $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$

$$= \frac{n!}{a^{n+1}} \qquad n \text{ صحيح موجب} ,\; a > 0$$

381. $\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

382. $\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-ax}\,dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

383. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

384. $\int_0^{\infty} e^{(-x^2-a^2/x^2)}\,dx = \frac{1}{2}e^{-2a}\sqrt{\pi} \qquad a > 0$

385. $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx\,dx = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad a > 0$

386. $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx\,dx = \frac{b}{a^2 + b^2} \qquad a > 0$

387. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x}\,dx = \cot^{-1} a \qquad a > 0$

388. $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}e^{-b^2/4a^2}}{2a} \qquad a > 0$

389. $\int_0^1 (\log x)^n\,dx = (-1)^n n!$ n صحيح موجب

390. $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}$

391. $\int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\,dx = -\frac{\pi^2}{12}$

392. $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi^2}{8}$

393. $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$

394. $\int_0^1 \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{4}$

395. $\int_0^\infty \log\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)dx = \frac{\pi^2}{4}$

396. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\log(1/x)}} = \sqrt{\pi}$

397. $\int_0^1 \log|\log x|\,dx$

$$= \int_0^\infty e^{-x}\log x\,dx = -\gamma \equiv -0.5772157\cdots$$

398. $\int_0^{\pi/2} \log\sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \log\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\log_e 2$

399. $\int_0^{\pi} x\log\sin x\,dx = -\frac{\pi^2}{2}\log_e 2$

400. $\int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^{1/2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

401. $\int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-1/2} dx = \sqrt{\pi}$

402. $\int_0^1 x^m \left(\log \frac{1}{x}\right)^n dx = \frac{\Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}}, \quad m+1>0, n+1>0$

403. $\int_0^\pi \log(a \pm b\cos x)\, dx = \pi \log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}\right), \quad a \geqq b$

404. $\int_0^\pi \frac{\log(1+\sin a \cos x)}{\cos x} dx = \pi a$

405. $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx = \log \frac{1+b}{1+a}$

406. $\int_0^\pi \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \qquad a>b>0$

407. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\cos^{-1}\frac{b}{a}}{\sqrt{a^2-b^2}} \qquad a>b$

408. $\int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{1+x^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-a} & a>0 \\ \frac{\pi}{2} e^{a} & a<0 \end{cases}$

409. $\int_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

410. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log \frac{b}{a}$

411. $\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} ax - \tan^{-1} bx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{a}{b}$

412. $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \log \frac{b}{a}$

413. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}$

414. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} = \frac{\pi(a^2 + b^2)}{4a^3b^3}$

415.

$$\int_0^{\pi} \frac{(a - b\cos x)\,dx}{a^2 - 2ab\cos x + b^2} = \begin{cases} 0 & a^2 < b^2 \\ \dfrac{\pi}{a} & a^2 > b^2 \\ \dfrac{\pi}{2a} & a = b \end{cases}$$

416. $\int_0^1 \frac{1 + x^2}{1 + x^4}\,dx = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$

417. $\int_0^1 \frac{\log(1 + x)}{x}\,dx = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$

418. $\int_{+\infty}^1 \frac{e^{-xu}}{u}\,du = \gamma + \log x - x$

$$+ \frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \cdots$$

$$\gamma = \lim_{t \to \infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{t} - \log t\right)$$ حيث

$$= 0.5772157 \cdots \qquad 0 < x < \infty$$

419. $\int_{+\infty}^1 \frac{\cos xu}{u}\,du = \gamma + \log x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \cdots$

$$0 < x < \infty$$

420. $\int_0^1 \frac{e^{xu} - e^{-xu}}{u}\,du = 2\left(x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \cdots\right)$

$$0 < x < \infty$$

421. $\int_0^1 \frac{1 - e^{-xu}}{u}\,du = x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} - \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \cdots$

$$0 < x < \infty$$

422. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 x}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 K^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 K^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 K^6 + \cdots\right]$ $\qquad K^2 < 1$

423. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 K^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{K^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{K^6}{5} - \cdots\right]$ $\qquad K^2 < 1$

424. $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \frac{\pi x}{c} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{c} + \cdots + b_1 \sin \frac{\pi x}{c} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{c} + \cdots$ $\qquad -c < x < +c$

where $a_m = \frac{1}{c} \int_{-c}^{+c} f(x) \cos \frac{m\pi x}{c}\, dx$

$b_m = \frac{1}{c} \int_{-c}^{+c} f(x) \sin \frac{m\pi x}{c}\, dx$ $\qquad$ (سلاسل فورييه)

425.* $\int_0^\infty e^{-ax} \cosh bx\, dx = \frac{a}{a^2 - b^2}$ $\qquad 0 \leqq |b| < a$

426. $\int_0^\infty e^{-ax} \sinh bx\, dx = \frac{b}{a^2 - b^2}$ $\qquad 0 \leqq |b| < a$

427. $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2}$ $\qquad a > 0$

إن تحويل لابلاس من طرف واحد للتابع $f(t)$ حيث t حقيقي هو (إن وُجِد)

$$F(s) \equiv \mathfrak{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st}\, dt$$

حيث $s = \sigma + i\omega$ متغير عقدي . إن تحويل لابلاس العكسي $\mathfrak{L}^{-1}[F(s)]$ لتابع مناسب $F(s)$ هو $f(t)$ (إن وُجِد) وبحيث $F(s) \equiv \mathfrak{L}[f(t)]$. انظر الفصل 20 .

428. $\int_0^\infty xe^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$ $\quad a > 0$

429. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{2b(3a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^3}$ $\quad a > 0$

430. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{2a(a^2 - 3b^2)}{(a^2 + b^2)^3}$ $\quad a > 0$

431. $\int_0^\infty x^3e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{24ab(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^4}$ $\quad a > 0$

432. $\int_0^\infty x^3e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{6(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)}{(a^2 + b^2)^4}$ $\quad a > 0$

433. $\int_0^\infty x^ne^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{n![(a - ib)^{n+1} - (a + ib)^{n+1}]i}{2(a^2 + b^2)^{n+1}}$

$a > 0$

434. $\int_0^\infty x^ne^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{n![(a - ib)^{n+1} + (a + ib)^{n+1}]}{2(a^2 + b^2)^{n+1}}$

$a > 0$

435. $\int_0^\infty e^{-x}\log x\,dx = -\gamma = -0.5772157\cdots$ $\quad$ (انظر 418)

436. $\int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}\right)e^{-x}\,dx = \gamma = 0.5772157\cdots$

437. $\int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 + x} - e^{-x}\right)dx = \gamma = 0.5772157\cdots$

438. $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x} - e^{-1/x}}{x}\,dx = \gamma = 0.5772157\cdots$

التابع δ هو تابع $\delta(x - a)$ معرّف بحيث

439. $\int_{-\infty}^\infty \delta(t - a)\,dt = 1$ $\quad$ and $\quad \delta(x - a) = 0 \quad x \neq a$

و a ثابت .

ليكن $g(t)$ تابعاً حقيقياً للمتغير t فإن

440. $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, \delta(t-a)\, dt = g(a)$

أما مشتق التابع δ بالنسبة لـ x فهو كائن معرّف بذاته بحيث

441. $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, \delta'(t-a)\, dt = -g'(a)$

442. $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, \delta^{k}(t-a)\, dt = (-1)^{k} g^{(k)}(a) \qquad k = 1, 2, \cdots$

مشتق التكامل المحدد . ليكن $a(\alpha), b(\alpha)$ تابعين مستمرين وقابلين للمفاضلة بالنسبة لـ α في $c \leqq \alpha \leqq d$ ، ولنفرض أن $f(x,\alpha)$ تابع مستمر بالنسبة للمتغيرين المستقلين α و x في

$$c \leqq \alpha \leqq d \ , \ a(\alpha) \leqq x \leqq b(\alpha)$$

فإذا كان

$$\phi(\alpha) = \int_{x=a(\alpha)}^{x=b(\alpha)} f(x,\alpha)\, dx$$

فإن

443. **(a)** $\dfrac{d\phi}{d\alpha} = -f(a,\alpha)\dfrac{da}{d\alpha} + \int_{x=a}^{x=b} \dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx + f(b,\alpha)\dfrac{db}{d\alpha}$

وفي الحالة التي يكون فيها a , b ثابتين مستقلين عن α فإن **(a)** تصبح

(b) $\dfrac{d\phi}{d\alpha} = \int_{a}^{b} \dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx$

عندما يكون $f(t)$ مستمراً في $a \leqq t \leqq b$ و $a \leqq x \leqq b$ فإن

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

نظرية القيمة الوسطى في التكاملات . إذا كان $g(t)$ و $f(t)$ تابعين مستمرين وقابلين للمكاملة في $a \leqq x \leqq b$ وكان $g(t)$ محافظاً على إشارته نفسها في $a \leqq x \leqq b$ فإنه يوجد عدد ξ , $a < \xi < b$ بحيث

444. **(a)** $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$

عندما يكون $g(x) \equiv 1$ فإن **(a)** تؤول إلى نظرية القيمة الوسطى العادية .

(b) $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi) \qquad a < \xi < b$

نظرية غرين . لتكن $P, Q, \partial P/\partial y, \partial Q/\partial x$ توابع مستمرة على وداخل الحدود C للمنطقة A فإن

445. $\iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy = -\int_C (P\,dx + Q\,dy)$

حيث نأخذ التكامل على المنحني C بالاتجاه الموجب .

ونقول إن النقطة (x,y) ترسم C **بالاتجاه الموجب** إذا سارت عليه بعكس عقارب الساعة .

8. تحليل المتجهات

149. تعاريف . التمثيل التحليلي

المتجه V هو كمية تتعين تماماً بمقدار واتجاه . ويمكن تمثيل المتجه هندسياً بقطعة مستقيمة موجّهة $V = \overrightarrow{OA}$. أما السُّلّمي S فهو كمية تتعين تماماً بمقدار .
بفرض $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ثلاثة متجهات واحدية (طول كل منها 1) للمحاور $OX, OY,$ OZ المتعامدة مثنى مثنى ، ولنفرض V متجهاً في الفضاء و a, b, c مساقط V على المحاور OX, OY, OZ على الترتيب . عندئذٍ يمكن كتابة V بالشكل

$\boldsymbol{V} = a\,\boldsymbol{i} + b\,\boldsymbol{j} + c\,\boldsymbol{k}$ أما مقدار (طول) V فهو

$$|V| = +\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

كما أن جيوب تمام توجيه V تتناسب مع مركباته ونكتب

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = a : b : c$$

150. المجموع المتجهي V لـ n متجهاً

لتكن لدينا المتجهات $V_1, V_2, \ldots, V_n$ بحيث

$V_1 = a_1\, i + b_1\, j + c_1\, k$ و $V_1 = a_2\, i + b_2\, j + c_2\, k$ وهكذا . . .

فإن مجموع هذه المتجهات يكتب بالشكل

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)i + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)j + (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)k$$

151. جداء متجه V بسُلّمي S

$$SV = (Sa)i + (Sb)j + (Sc)k$$

$$(S_1 + S_2)V = S_1V + S_2V \qquad (V_1 + V_2)S = V_1S + V_2S$$

152. الجداء السُّلَّمي لمتجهين $V_1 \cdot V_2$

حيث ϕ هي الزاوية من V_1 إلى V_2 $\quad V_1 \cdot V_2 = |V_1||V_2| \cos \phi$

$$V_1 \cdot V_1 = |V_1|^2 \qquad V_1 \cdot V_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = V_2 \cdot V_1$$

$$(V_1 + V_2) \cdot V_3 = V_1 \cdot V_3 + V_2 \cdot V_3$$

$$V_1 \cdot (V_2 + V_3) = V_1 \cdot V_2 + V_1 \cdot V_3$$

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \qquad i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$

153. الجداء المتجهي (الخارجي) لمتجهين $V_1 \times V_2$

الجداء المتجهي $V_1 \times V_2$ هو متجه قيمته $|V_1||V_2| \sin \phi$ حيث ϕ هي الزاوية من V_1 إلى V_2 ، وهذا المتجه موجّه بالاتجاه الذي يتحرك فيه برغي عند تدويره من V_1 إلى V_2 ونكتب

$$V_1 \times V_2 = -V_2 \times V_1 = (b_1c_2 - b_2c_1)i + (c_1a_2 - c_2a_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

$$(V_1 + V_2) \times V_3 = V_1 \times V_3 + V_2 \times V_3$$

$$V_1 \times (V_2 + V_3) = V_1 \times V_2 + V_1 \times V_3$$
$$V_1 \times (V_2 \times V_3) = V_2(V_1 \cdot V_3) - V_3(V_1 \cdot V_2)$$
$$i \times i = j \times j = k \times k = 0, \; i \times j = k, \; j \times k = i, \; k \times i = j$$
$$V_1 \cdot (V_2 \times V_3) = (V_1 \times V_2) \cdot V_3 = V_2 \cdot (V_3 \times V_1) = [V_1 V_2 V_3]$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

154. اشتقاق المتجهات

لتكن المتجهات $V_1, V_2, \ldots, V_n$ توابع للمتغير t ، عندئذٍ

$$\frac{d}{dt}(V_1 + V_2 + \cdots) = \frac{dV_1}{dt} + \frac{dV_2}{dt} + \cdots$$

حيث $\frac{dV_1}{dt} = \frac{da_1}{dt} i + \frac{db_1}{dt} j + \frac{dc_1}{dt} k,$ الخ .

$$\frac{d}{dt}(V_1 \cdot V_2) = \frac{dV_1}{dt} \cdot V_2 + V_1 \cdot \frac{dV_2}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}(V_1 \times V_2) = \frac{dV_1}{dt} \times V_2 + V_1 \times \frac{dV_2}{dt}$$

إذا كان $|V|$ ثابتاً فإن $V \cdot \frac{dV}{dt} = 0.$ $\qquad V \cdot \frac{dV}{dt} = |V| \frac{d|V|}{dt}.$

$$\text{grad } S \equiv \nabla S \equiv \frac{\partial S}{\partial x} i + \frac{\partial S}{\partial y} j + \frac{\partial S}{\partial z} k$$
$$\text{div } V \equiv \nabla \cdot V \equiv \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}$$

حيث S سُلّمي و $grad\ S$ هو رمز **لتدرج** S ، كما أن $div\ V$ هو رمز **لتفرق** V ، وأخيراً $curl\ V$ هو رمز **لدوران** V .

$$\text{curl } \boldsymbol{V} \equiv \text{rot } \boldsymbol{V} \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix} \equiv \nabla \times \boldsymbol{V}$$

$$\text{div grad } S \equiv \nabla^2 S \equiv \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{i}\nabla^2 a + \boldsymbol{j}\nabla^2 b + \boldsymbol{k}\nabla^2 c$$

$$\text{curl grad } S = 0 \qquad \text{div curl } \boldsymbol{V} = 0$$

$$\text{curl curl } \boldsymbol{V} = \text{grad div } \boldsymbol{V} - \nabla^2 \boldsymbol{V}$$

155. نظرية ستوكس

ليكن S سطحاً محدباً ، أي ذلك السطح الذي يقطعه أي مستقيم موازٍ لأحد المحاور الاحداثية بنقطتين على الأكثر . ولنفرض أن C منحنٍ بسيط مغلق على S يحدّ منطقة K وليكن $\boldsymbol{F}$ متجهاً . عندئذٍ

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_K \text{curl } \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

حيث تتم المكاملة على C بالاتجاه الموجب . لدينا هنا

$$d\,\mathbf{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}$$

$$d\,\boldsymbol{S} = dS_1\,\boldsymbol{i} + dS_2\,\boldsymbol{j} + dS_3\,\boldsymbol{k}$$

و dS_1, dS_2, dS_3 هي مساقط dS على المستويات yz, zx, xy على الترتيب . فإذا كانت

$$\ell = \cos\alpha \;,\; m = \cos\beta \;,\; n = \cos\gamma$$

هي جيوب تمام توجيه الناظم $\boldsymbol{n}$ المتجه نحو خارج السطح في أي نقطة من

$\mathcal{S}$ بالنسبة للمحاور x, y, z فإن

$$d\,\boldsymbol{S} = \ell\, dS\, \boldsymbol{i} + m\, dS\, \boldsymbol{j} + n\, dS\, \boldsymbol{k}$$

هنا dS هو مقدار المتجه (طول المتجه) $d\boldsymbol{S}$.

156. نظرية غرين

ليكن $\boldsymbol{F}$ متجهاً و V الحجم الذي يحصره السطح المحدب $\mathcal{S}$. عندئذٍ

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

حيث تتم المكاملة على V و $\mathcal{S}$. هنا dV هو عنصر الحجم و $d\boldsymbol{S}$ معرّفة كما في 155 .

9. المجموعات . العلاقات . التوابع

157. المجموعات

المجموعة هي مفهوم رياضي حدسي نتعرف عليه بالأمثلة فنقول مجموعة أشجار ، ومجموعة الأعداد الحقيقية R ومجموعة النقط S ، فإذا رمزنا بـ A لمجموعة من الأشياء واضحة المعالم وكان x واحداً منها ، قلنا إن x هو عنصر من المجموعة A ونعبر عن ذلك بالرمز $x \in A$ ونقرأ « x **ينتمي** إلى A » ، فإذا لم يكن x عنصراً من A قلنا إن « x **لا ينتمي** إلى A » ورمزنا لذلك بـ $x \notin A$.

ويتم تعيين المجموعة إما **بكتابة جميع عناصرها** دون تكرار بغض النظر عن طبيعة وترتيب العناصر داخل قوسين بالشكل

$$A = \{ 5,\ a,\ \bigstar,\ +,\ \text{هـ} \}$$

أو بإيراد خاصة نتمكن بواسطتها من التعرف على عناصر المجموعة ومعرفة فيما إذا كان عنصر ما ينتمي للمجموعة أو لا ينتمي .

فمثلاً $B = \{ x \mid x^2 < 2 \}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي مربعها أصغر من العدد 2 ، وهكذا فإن

$1 \in B$ بينما $2 \notin B$

عندما تحوي المجموعة عنصراً واحداً α نكتب $A = \{\alpha\}$ ونسميها **مجموعة وحيدة العنصر** ، وعندما لا تحوي المجموعة أي عنصر نسميها **المجموعة الخالية** ونرمز لها بـ ϕ. أما إذا حوت المجموعة جميع العناصر قيد الدرس فإننا نسميها **المجموعة الشاملة النسبية** ونرمز لها بـ Ω . فمجموعة المثلثات هي مجموعة شاملة نسبية أمام المجموعة الشاملة النسبية التي هي مجموعة الأشكال الهندسية المستوية . وقد نحذف أحياناً كلمة «النسبية» إذا لم يكن هناك ضرورة لذكرها .

المجموعة المتممة A' لمجموعة A بالنسبة لمجموعة شاملة I هي مجموعة جميع العناصر المنتمية إلى I وغير المنتمية إلى A .

مجموعة المجموعات هي المجموعة التي كل عنصر من عناصرها مجموعة .

تساوي مجموعتين إذا رمزنا لمجموعة ما بـ A ورمزنا لها أيضاً بـ B فمن البديهي أن نكتب $A = B$ وذلك يعني أن مجموعة عناصر A هي مجموعة عناصر B نفسها أي مهما يكن $x \in A$ فإن $x \in B$ وبالعكس ، ونعبر عن ذلك بالرموز كما يلي

$$\forall x \in B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{و} \quad \forall x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

الاحتواء نقول إن A محتواة في B أو إن A مجموعة جزئية من B ونكتب $A \subseteq B$ إذا تحقق الشرط

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \qquad (*)$$

وهكذا فإن المجموعة الخالية محتواة في أي مجموعة أخرى ونكتب

$$\phi \subseteq A$$

فإذا تحقق الشرط (*) وكان يوجد في B عنصر واحد على الأقل y لا ينتمي إلى A قلنا إن A محتواة تماماً في B ونرمز لذلك بـ $A \subset B$. أما إذا تحقق الشرط (*) ولم يكن هناك أي عنصر من B لا ينتمي إلى A عندئذٍ فإن $A = B$.

158. الاجتماع والتقاطع

إجتماع (اتحاد) مجموعتين A و B هي مجموعة نرمز لها بـ $A \cup B$ ونعني بها جميع العناصر المنتمية إلى A أو إلى B أو إلى A و B معاً .

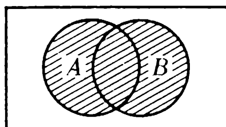
تقاطع مجموعتين A و B هي مجموعة نرمز لها بـ $A \cap B$ ونعني بها جميع العناصر المنتمية إلى A و B معاً .

المجموعتان المنفصلتان هما مجموعتان لا يوجد بينهما أي عنصر مشترك ، أي أن تقاطعهما يساوي المجموعة الخالية .

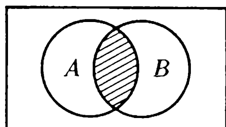
ونقول بأن المجموعتين **متداخلتان** إذا كان يوجد بينهما بعض العناصر المشتركة .

159. مخطط ڤن

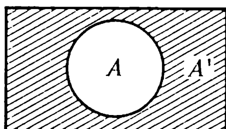
هو أسلوب إيضاحي يستخدم الرسم لتوضيح مفاهيم وقوانين المجموعات ، حيث يتم تمثيل المجموعة الشاملة بالنقط الواقعة داخل مستطيل ، وتمثيل أي مجموعة بالنقط الواقعة داخل منحنٍ مغلق واقع داخل المستطيل . وهكذا توضح الأشكال التالية الاجتماع والتقاطع ومفهوم المجموعة المتممة .



$A \cup B = B \cup A$



$A \cap B = B \cap A$



A'

160. العمليات على المجموعات

نأخذ X مُرتَّباً من n

$$X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$$

يحتوي على n عنصراً مأخوذة من n مجموعة . إن **العملية** على X هي **القاعدة** التي تمكننا من مقابلة كل X بعنصر وحيد من مجموعة S .

فإذا كانت $n = 1$ قلنا إن العملية **أحادية** ، وعندما $n = 2$ نقول إن العملية **ثنائية** ، فإذا كانت $n = m$ قلنا إن العملية «**ميميّة**» .

161. جبر المجموعات

لتكن A, B, C ثلاث مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة I عندئذٍ تصحّ القوانين التالية من أجل الاجتماع $\cup$ والتقاطع $\cap$:

1. قوانين الإغلاق

(a) يوجد مجموعة وحيدة معرّفة بالشكل $A \cup B$.

(b) يوجد مجموعة وحيدة معرّفة بالشكل $A \cap B$.

2. قوانين التبديل

(*a*) $A \cup B = B \cup A$ (*b*) $A \cap B = B \cap A$

3. قوانين التجميع

(*a*) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
(*b*) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

4. قوانين التوزيع

(*a*) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(*b*) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. قوانين الجمود

(*a*) $A \cup A = A$ (*b*) $A \cap A = A$

6. خواص المجموعة الشاملة I . العنصر المحايد

(*a*) $A \cup I = I$ (*b*) $A \cap I = A$

7. خواص المجموعة الخالية ϕ . العنصر المحايد

(*a*) $A \cup \emptyset = A$ (*b*) $A \cap \emptyset = \emptyset$

8. خواص الاحتواء $\subset$

(a) $A \subset I$ (b) $\phi \subset A$

(c) إذا كان $A \subset B$ فإن $A \cup B = B$

(d) إذا كان $A \subset B$ فإن $A \cap B$

(e) $A \subset (A \cup B)$ (f) $(A \cap B) \subset A$

9. خواص المجموعة المتممة

(a) يوجد من أجل أي مجموعة A مجموعة متممة A' بالنسبة إلى I

(b) $A \cup A' = I$

(c) $A \cap A' = \emptyset$

(d) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ قانون دي مورغان (الثنوية)

(e) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ قانون دي مورغان (الثنوية)

(f) $\emptyset' = I$

(g) $I' = \emptyset$

(h) $(A')' = A$ (الارتداد)

10. مبدأ الثنوية

إذا كان لدينا صيغة صحيحة تتضمن الرموز

$\cup, \cap, \phi, I, \subset, \supset$

فإن هذه الصيغة تبقى صحيحة عندما نضع فيها $\cup$ مكان $\cap$ و $\cap$ مكان $\cup$ ، كما نضع فيها ϕ مكان I و I مكان ϕ ثم نضع $\subset$ مكان $\supset$ و $\supset$ مكان $\subset$.

11. قوانين الامتصاص

(a) $A \cup (A \cap B) = A$ (b) $A \cap (A \cup B) = A$

12. قوانين الاتساق

الشروط $A \subset B$, $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ متكافئة مثنى مثنى .

162. التقابل واحد ـ لواحد بين مجوعتين

نقول إنه يوجد **تقابل واحد ـ لواحد** بين مجموعتين A و B (تقابل وتقابل عكسي) إذا أمكن مقابلة جميع عناصر A بجميع عناصر B بحيث نقابل

كل عنصر من A بعنصر واحد فقط من B ، كما نقابل كل عنصر من B بعنصر واحد فقط من A .

163. المجموعات المتكافئة

نقول إن المجموعتين A و B **متكافئتان** ونكتب $A \approx B$ إذا وفقط إذا كان يوجد تقابل واحد ـ لواحد بين A و B .

164. العدد الرئيس لمجموعة

نقول إن لمجموعتين العدد الرئيس نفسه إذا وفقط إذا كانتا متكافئتين . ويكون لمجموعة A العدد الرئيس n إذا وفقط إذا كان يوجد تقابل واحد ـ لواحد بين عناصر A وبين الأعداد الطبيعية $1, 2, 3, \ldots n$.

165. المجموعات المنتهية وغير المنتهية

نقول عن مجموعة غير خالية بأنها منتهية إذا وفقط إذا كان العدد الرئيس لها واحداً من الأعداد الرئيسة $1, 2, 3, \ldots$. أما المجموعة غير المنتهية فهي مجموعة غير خالية وليست **مجموعة منتهية** ، كما في التعريف .

166. $\mathcal{N}_0$ و $\mathcal{N}$

نشير إلى العدد الرئيس لمجموعة الأعداد الطبيعية $1, 2, 3, \ldots$ بالرمز $\mathcal{N}_0$. أما العدد الرئيس لمجموعة الأعداد الحقيقية فيشار إليه بالرمز $\mathcal{N}$.

167. المجموعات القابلة للعد .

إذا كان العدد الرئيس لمجموعة هو $\mathcal{N}_0$ قلنا إن هذه المجموعة **قابلة للعد** .

168. المجموعات العَدودة

نقول إن المجموعة A عَدودة إذا وفقط إذا كان يوجد تقابل واحد ـ لواحد بين عناصر A وعناصر مجموعة من الأعداد الطبيعية . وهكذا فالمجموعة المنتهية أو القابلة للعد هي **مجموعة عدودة** . ويمكن أن نُدرج عناصر المجموعة العدودة كمتوالية .

مثال . إن كل مجموعة منتهية A عدودة ، وعددها الرئيس هو عدد عناصر هذه المجموعة .

مثال . إن مجموعة الأعداد الكسرية هي مجموعة عدودة (وفي الوقت نفسه قابلة للعد) وعددها الرئيس هو $\mathcal{N}_0$.

ملاحظة . يصطلح بعض المؤلفين على أن المجموعة العدودة هي المجموعة القابلة للعد نفسها .

نظرية . إذا كان العدد الرئيس لمجموعة A مساوياً للعدد الرئيس لمجموعة جزئية محتواة تماماً في A فإن A مجموعة غير منتهية . فإذا لم يتساوى العدد الرئيس للمجموعة A مع العدد الرئيس لأي مجموعة جزئية A ، فإن A مجموعة منتهية .

169. المجموعات غير العدودة

المجموعة غير العدودة هي تلك التي لا تحقق شرط المجموعة العدودة (انظر 168)، وهكذا فمجموعة الأعداد الحقيقية بين الصفر والواحد هي مجموعة غير عدودة .

170. تطبيق مجموعة A في مجموعة B

لتكن A و B مجموعتين ليس بالضرورة منفصلتين . **إن تطبيق** A في B هو مجموعة الأزواج (a,b) حيث $a \in A$ و $b \in B$ بحيث يظهر كل a من

A مرة واحدة فقط وبزوج واحد ، بينما يمكن أن يظهر b من B في أكثر من زوج . ويُعْرَف هذا التطبيق بأنه **تقابل كثير - لواحد** بين عناصر A وبين بعض أو كل عناصر B . وهكذا فإن تطبيق المجموعة A في B هو في الواقع عملية مواءَمة تتم فيها مقابلة كل عنصر $a \in A$ بعنصر وحيد $b \in B$ نسميه **صورة** ونكتب $a \to b$. فإذا كانت جميع عناصر B صوراً لعناصر A قلنا إن **التطبيق غامر** أو إن A قد طُبقت **على** B .

171. مجموعة الجداء

لتكن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات عددها n ولنفرض أن $a_i \in A_i$ من أجل $i = 1, 2, \ldots, n$.

نعرف مجموعة الجداء أو (جداء المجموعات) $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ بأنه مجموعة جميع **المرتّبات** من n التي نكتبها بالشكل .

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

نسمي كذلك مجموعة جميع الأزواج المرتبة (x,y) بحيث $x \in X$ و $y \in Y$ **الجداء الديكارتي** للمجموعتين X و Y ونرمز له بـ $X \times Y$.

وفي الحالة التي تكون فيها $X = Y$ قلنا إن مجموعة جميع الأزواج المرتبة تمثل الجداء الديكارتي على Y ورمزنا لهذا الجداء بـ $Y \times Y$.

الأزواج **المرتبة المتساوية** . نقول إن $(x,y) = (a,b)$ إذا وفقط إذا كان $x = a$ و $y = b$.

172. المتغير

نسمي الرمز في جملة أو عبارة أو تعبير **متغيراً**[1] إذا وفقط إذا كان هذا الرمز يقبل الاستعاضة عنه باسم عنصر (بعدد) من مجموعة نسميها **مجموعة التعويض** . (أو

المجال أو المجموعة الشاملة) المعرّفة خصيصاً للمتغير . فإذا كانت هذه المجموعة تحوي عنصراً واحداً ، فالمتغير يعرّف عنصراً واحداً ويسمى عندئذٍ «**الثابت**» . وتستخدم المتغيرات عادة لتحل محل الأعداد والمقادير الرياضية في العبارات الجبرية والمعادلات والمتراجحات .

173. العلاقة

العلاقة R في مجموعة U هي مجموعة جزئية من الأزواج المرتبة (x,y) من الجداء $U \times U$ ويكون **مُنطلَق (مجال)** العلاقة R مجموعة جزئية من U يمثل x كل عنصر منها . أما **مستقر (مدى)** العلاقة R فهو أيضاً مجموعة جزئية من U يمثل y عنصراً منها .

174. البيان

ليكن x و y عددين حقيقيين ، فإن **بيان** العلاقة R التي أزواجها المرتبة (x,y) هو مجموعة النقط في المستوي XY التي تعطى احداثياتها بهذه الأزواج المرتبة .

175. المحل الهندسي

المحل الهندسي هو مجموعة من جميع النقط ، وفقط تلك النقط التي تحقق شرطاً معطى . كما أن المحل الهندسي هو بيان لعلاقة ما .

176. مجموعة الحل

بفرض أن x تنتمي إلى المجموعة الشاملة I . ولنأخذ المجموعة $\{ x | S \}$ حيث S عبارة تتضمن x أو شرطاً مفروضاً على x . نقول إن العنصر a المنتمي إلى I هو من مجموعة حل S إذا كانت العبارة S صحيحة من أجل ذلك العنصر a . ونسمي S **منتقي المجموعة** .

مثال . إذا كانت x من مجموعة الأعداد الحقيقية فإن مجموعة الحل لـ $\{x \mid 2x = 3\}$ هي $\{3/2\}$.

مثال إذا كانت $I = \{1,3,5\}$ وكان $x \in I$ فإن مجموعة الحل لـ $\{x \mid x > 2\}$ هي $\{3,5\}$.

177. التابع (الدّالة)

التابع f في مجموعة U هو مجموعة جزئية من الأزواج المرتبة (x,y) من $U \times U$ بحيث نقابل كل x بـ y واحدة . وبكلمات أخرى **التابع** f في U هو علاقة R في U بحيث تتم مقابلة كل x من مجال العلاقة R بـ y واحدة من مدى العلاقة R . كما يمكن أن نعرف التابع f المعرّف على U ويأخذ قيمة في V بأنه تلك القاعدة التي تمكننا من مقابلة كل عنصر من U بعنصر واحد من V ونعبر عن ذلك بالرمز $f : (x,y)$ أو بالرمز $f{:}x{\to}y$. ونشير إلى العنصر y المقابل لـ x عبر التابع f بالرمز $f(x)$ ، الذي نسميه أحياناً «قيمة التابع f عند x » ونكتب $y = f(x)$.

مثال . إذا كانت $U = \{0,1\}$ فإن مجموعة الأزواج المرتبة $U \times U$ هي **شبكة** النقط $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ فإذا كانت العلاقة R_1 في U معرّفة بالشكل

$$R_1 = \{ (x,y) \mid (x^2 + y^2) < 1 \}$$

فإن R_1 ننتقي من $U \times U$ المجموعة الجزئية $\{(0,0)\}$. أما إذا عرّفنا R_2 بالشكل

$$R_2 = \{ (x,y) \mid (x^2 + y^2) \leqq 1 \}$$

فإن R_2 تنتقي المجموعة $\{ (0,0), (0,1), (1,0) \}$ ويكون مجال العلاقة R_1 هو $\{0\}$ ، وينتج من تعريف التابع أن R_1 تابعاً بينما R_2 ليست تابعاً .

مثال . تعرف العلاقة $\{ (x,y) \mid y = x^2 + 1 \}$ في مجموعة الأعداد الحقيقية U تابعاً F وتكون $F(1) = 2$ هي قيمة $F(x) = x^2 + 1$ عند $x = 1$. إن مجال F (**مجموعة التعريف**) هي مجموعة الأعداد الحقيقية . أما مدى F (مجموعة قيم التابع) فهو مجموعة الأعداد الحقيقية المساوية أو الأكبر من الواحد .

178. العلاقة العكسية

تسمى المجموعة R^{-1} التي نحصل عليها من مبادلة موقعي الاحداثيات في جميع الأزواج المرتبة لعلاقة R بالعلاقة العكسية لـ R .

مثال . العلاقة العكسية R^{-1} للعلاقة

$$R = \{ (1,2), (1,3), (2,4) \}$$

هي $R^{-1} = \{ (2,1), (3,1), (4,2) \}$.

لاحظ هنا أن R ليست تابعاً بينما R^{-1} هي تابع .

179. التابع العكسي

يتم الحصول على التابع العكسي لتابع معطى بمبادلة إحداثيات كل زوج مرتب منه ، ونلاحظ أن التابع العكسي هو علاقة ولكنه ليس بالضرورة تابعاً .

التابع F هو مجموعة الأزواج المرتبة (x,y) التي لا يوجد بينها زوجان يشتركان بالمركبة الأولى x ويختلفان في الثانية . أما إذا كان التابع F لا يحتوي من بين أزواجه المرتّبة زوجين يشتركان في المركبة الثانية ويختلفان في المركبة الأولى ، فإن مجموعة الأزواج الناتجة عن F بتبديل موقعي المركبتين الأولى والثانية تُشَكّل ما نسميه التابع العكسي ونرمز له بـ F^{-1} . وفي هذه الحالة فإن مجال F يصبح مدى F^{-1} وبالعكس . ونكتب $F:(a,b)$ و $F^{-1}:(b,a)$.

مثال . إذا كانت الأزواج المرتبة للتابع F من الشكل (a_1,b_1), (a_2,b_2), ... فإن الأزواج المرتبة للتابع F^{-1} إو وُجد هي (b_1,a_1), (b_2,a_2),... .

مثال . ليكن x و y عددين حقيقيين ، فإن العلاقة العكسية R^{-1} للعلاقة

$$R=\left\{(x,y)\mid y=2x\right\}$$

هي $R^{-1}=\left\{(x,y)\mid x=y/2\right\}$.

ونلاحظ أن R و R^{-1} تابعان . ويُكتب التابع العكسي أحياناً بالشكل

$$R^{-1}=\left\{(x,y)\mid y=x/2\right\}$$

مثال . ليكن x و y عددين حقيقيين ، فإن العلاقة العكسية R^{-1} للعلاقة

$$R=\left\{(x,y)\mid y=3x^2\right\}$$

هي $R^{-1}=\left\{(x,y)\mid x=\pm\sqrt{y/3}\right\}$

ونلاحظ هنا أن R تابع بينما R^{-1} ليست كذلك . ويمكن كتابة العلاقة العكسية بالشكل

$$R^{-1} = \left\{ (x,y) \mid y = \pm \sqrt{x/3} \right\}$$

أما إذا اقتصرنا على $x \geqq 0$ من أجل مدى العلاقة R فإن

$$R^{-1} = \left\{ (x,y) \mid y = \sqrt{x/3} \right\}$$

تصبح عندئذٍ تابعاً .

مثال . العلاقة العكسية R^{-1} للعلاقة

$$R = \left\{ (x,y) \mid y - 2 = |x| - x \right\}$$

هي $$R^{-1} = \left\{ (x,y) \mid x - 2 = |x| - y \right\}$$

مثال . ليكن x و y عددين حقيقيين فإن العلاقة العكسية R^{-1} للعلاقة

$$R = \left\{ (x,y) \mid y = \sin x \right\}$$

هي $R^{-1} = \left\{ (x,y) \mid x = \sin y \right\}$. هنا y هو العدد الذي جيبه x ، R^{-1} ليست تابعاً . فإذا اقتصرنا في R على قيم x بحيث

$$-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2,$$

فإن R^{-1} عندئذٍ هي تابع ، وفي هذه الحالة نكتب (انظر 60) .

$$R^{-1} = \{(x,y) \mid y = \text{Sin}^{-1} x\} \qquad \frac{-\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$$

180. تركيب تابعين

ليكن $f:(x,y)$ و $g:(y,z)$ تابعين مُعطَيين . ولنعرّف الزوج المرتب (x,z) كما يلي : اختر x عندئذٍ يعين f قيمة y مقابل x . فإذا كانت y في مجال (منطقة تعريف g) فإن g تقابل عندئذٍ y بقيمة z وبذلك نحصل على الزوج (x,z) . إن مجموعة الأزواج المرتبة التي نحصل عليها بهذه الصورة تعرّف تابعاً نسميه **التابع المركب** ونرمز له بـ $g \circ f$ ونكتب $g \circ f:(x,y)$.

مثال . لنعرّف التابعين $g:(y,z)$ و $f:(x,y)$ بالشكل

$$y = f(x) = x^2 \quad \text{و} \quad z = g(y) = 3y - 2$$

حيث x, y, z أعداد حقيقية . يُعطى التابع المركب $g \circ f:(x,y)$ عندئذٍ

بالشكل $z = g(y) = 3x^2 - 2$

أي أن $g \circ f:(x,z) = g \circ f:(x, 3x^2 - 2)$

لدينا $f \circ g:(x,y) = f \circ g:\left\{x, \ (3x-2)^2\right\}$ لأن قيم

$g:(x,y)$ و $f:(y,z)$ هي

$$y = g(x) = 3x - 2 \quad \text{و} \quad z = f(y) = y^2 = (3x-2)^2$$

181. جبر التوابع

ليكن $g:(x,z)$ و $f:(x,y)$ تابعين وليكن d_g و d_f يتألفان من مجموعة من الأعداد الحقيقية أو العقدية التي يمكن أن نعرّف عليها العمليات الحسابية الأربعة . عندئذٍ فإن **المجموع** $f+g$ والطرح $f-g$ والضرب fg والقسمة

f/g تُعرَّف كما يلي :

$$f:(x,y) + g:(x,z) = (f+g):(x, y+z)$$
$$f:(x,y) - g:(x,z) = (f-g):(x, y-z)$$
$$f:(x,y) \times g:(x,z) = (fg):(x, yz)$$
$$\frac{f:(x,y)}{g:(x,z)} = \left(\frac{f}{g}\right):\left(x, \frac{y}{z}\right)$$

فإذا فرضنا أن القيمتين التابعيتين لـ f و g هما $y = f(x)$ و $z = g(x)$ لأمكن أن نكتب قيم المجموع والطرح والضرب والقسمة كما يلي :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x) \times g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

المجال (منطقة التعريف) إن مجال $f+g$ و $f-g$ و fg هو مجموعة كل العناصر المشتركة بين مجالي f و g أي تقاطع المجموعتين d_f و d_g وهو في الواقع مجال f/g نفسه ماعدا قيم x التي يكون من أجلها $g(x) = 0$ وذلك بسبب استحالة التقسيم على الصفر .

التابع المطابق . التابع المطابق هو التابع i الذي تكون جميع أزواجه المرتبة من الشكل (x,x) . ويمكن أن نكتب i أحياناً بالشكل

$$i = \{(x, i(x)) \mid i(x) = x\}$$

182. تركيب التابع وعكسه

ليكن لدينا التابع $F : (y,x)$ وعكسه $F^{-1} : (x,y)$ فإن التابع المركب $F^{-1} \circ F$ يأخذ x إلى y عبر F ثم يعيد y إلى x عبر F^{-1} ، وهكذا فإن $F^{-1} \circ F = i$ كما أن $F \circ F^{-1} = i$.

183. تابع المجموعة الجمعي

لتكن $A, B, C, \ldots$ مجموعات جزئية من مجموعة منتهية I . ولنفرض f علاقة تُقابل أي مجموعة S من I . بعدد حقيقي وحيد نرمز له بـ $f(S)$ بحيث لو كانت A و B مجموعتين منفصلتين من I فإن $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$. يسمى f **بتابع المجموعة الجمعي** .

نظرية . إذا كان f تابع مجموعة جمعي و ϕ هي المجموعة الخالية فإن $f(\phi) = 0$.

نظرية . لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من I (ليس بالضرورة منفصلتين) ، فإن

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$$

تابع الوزن هو تابع مجموعة جمعي ω يأخذ فقط قيماً موجبة أو صفراً . أي أن $\omega(S) \geqslant 0$ من أجل جميع المجموعات S من I .

تابع الاحتمال . إذا كان P تابع وزن وكانت I هي المجموعة الشاملة وكان $P(I) = 1$. عندئذٍ نسمي P **تابع الاحتمال** .

نظرية . إذا كان f تابع مجموعة جمعي ، فإن $f(A) + f(A') = f(I)$ حيث A هي مجموعة جزئية من I و A' متممة A بالنسبة لـ I' .

نظرية إذا كان P تابع احتمال فإن $P(A) + P(A') = 1$.

184. النهايات

بفرض أن x تأخذ متتالية القيم الحقيقية $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. فإننا نقول إن x ينتهي إلى العدد a ونكتب $x \to a$ ، إذا كان يوجد مقابل كل عدد موجب ϵ عدد صحيح N بحيث يكون $|x_n - a| < \epsilon$ من أجل $n > N$. لتكن $f(x)$ قيمة التابع f عند x . عندئذٍ نقول إن $f(x)$ ينتهي إلى L عندما $x \to a$ ونكتب

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

إذا كان يوجد مقابل كل $\epsilon > 0$ عدد موجب δ بحيث تتحقق المتراجحة

$|f(x) - L| < \epsilon$ طالما $\delta > |x - a| > 0$.

185. التابع المستمر

نقول إن التابع f مستمر عند $x = a$ إذا كان $f(a)$ معرفاً وكانت النهاية $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة

وكان $$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

نقول إن التابع $f(x)$ **مستمر بانتظام** في المجال (a,b) إذا كان يوجد مقابل كل $\epsilon > 0$ عدد موجب δ بحيث $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ من أجل كل زوج من الأعداد x_1 و x_2 في المجال المغلق $[a,b]$ تحقق المتراجحة

$$|x_1 - x_2| < \delta$$

المجال المغلق $[a,b]$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية x المحققة للشرط $a \leqq x \leqq b$.

186. المتتاليات والسلاسل (المتسلسلات)

إذا قابلنا كل عدد صحيح n بعدد s_n عندئذٍ تُشكّل الأعداد $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ ما نسميه **متتالية** نرمز لها بـ $\{ s_n \}$ ، ونسمي كل عدد **حدّاً** في المتتالية . نقول إن المتتالية $\{ s_n \}$ **تتقارب** إلى S إذا كان

$$\lim_{n \to \infty} s_n = S$$

أي إذا كان يوجد مقابل كل $0 < \epsilon$ عدد N بحيث $| s_n - S | < \epsilon$ عندما $n > N$. ونسمي المتتالية **متقاربة** . وفيما عدا ذلك فالمتتالية **متباعدة** .

إذا كان يوجد مقابل أي عدد $G > 0$ عدد N بحيث $s_n > G$ من أجل $n > N$ قلنا أن المتتالية $\{ s_n \}$ **تتباعد بالتحديد إيجاباً** أي أن حدودها تتزايد بلا حدود ، ونكتب $s_n \to + \infty$ عندما $n \to + \infty$.

أما إذا كان $s_n < - G$ من أجل $n < N$ ومهما يكن $- G < 0$ فإننا نقول إن $\{ s_n \}$ **تتباعد بالتحديد سلباً** أي أن حدودها تتناقص بلا حدود .

إذا لم تكن المتتالية المتباعدة محددة التباعد قلنا إن المتتالية **متباعدة بدون تحديد** أو **غير محددة التباعد** ، إذ ربما تكون متأرجحة (متذبذبة) .

السلسلة (المتسلسلة) غير المنتهية هي مجموع متتالية من الأعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ونكتب ذلك بالصورة

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

ونقول إن هذه السلسلة **متقاربة** إلى S إن كان مجموع جميع حدودها يساوي S ونقول إن هذه السلسلة **متباعدة** فيما عدا ذلك ، إذ قد يكون المجموع S

مساوياً ∞ أو لا يكون المجموع معرّفاً كالسلسلة ... + $1 - 1 + 1 - 1$. ويمكن تعريف التقارب باستخدام ما يسمى **متتالية المجاميع الجزئية** الموافقة لسلسلة ما ، ونعرّف حدود هذه المتتالية بالعلاقة

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

وتكون السلسلة متقاربة أو متباعدة أو متباعدة بالتحديد إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية متقاربة أو متباعدة أو متباعدة بالتحديد . فإذا تقاربت $\{ s_n \}$ إلى S فإن مجموع السلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ يساوي S .

نقول إن السلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ **متقاربة اطلاقاً** إذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ متقاربة .

187. التقارب المنتظم

لتكن لدينا $s_n \equiv s_n(x)$ توابع للمتغير الحقيقي x والمعرفة على I . ولنفرض أن المتتالية $\{ s_n \}$ تتقارب إلى $S(x)$ من أجل أي قيمة x في I . نقول إن $\{ s_n \}$ تتقارب بانتظام في المجال الجزئي J من I إذا كان يوجد عدد وحيد N مستقل عن x من J (أي لا يتغير بتغير x) مقابل أي عدد $0 < \epsilon$ بحيث $\epsilon > | s_n(x) - S(x) |$ من أجل جميع قيم $N > n$ ومن أجل جميع قيم x في J .

تسمى المتتالية $s_n \equiv s_n(x)$ **المتتالية التابعية** . نأخذ السلسلة التابعية

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)$$

المتقاربة في I أي المتقاربة من أجل كل x في I . نقول إن هذه السلسلة متقاربة بانتظام في مجال جزئي J من I إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{ s_n (x) \}$ متقاربة بانتظام في J .

نظرية. الشرط اللازم والكافي لتقارب $\{ s_n \}$ هو أن يوجد عدد N مقابل كل $\epsilon > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة $| s_{n+k} - s_n | < \epsilon$ من أجل أي $n > N$ وأي $k \geqq 1$.

يمكن كتابة المتراجحة السابقة بالشكل

$$| a_{n+1} + \ldots + a_{n+k} | < \epsilon$$

188. التساوي المقارب

إذا كان $b_n \equiv b (n)$ و $a_n \equiv a (n)$ تابعين للعدد الصحيح n ، وكان

$$\lim_{n \to \infty} a_n / b_n = 1$$

فإننا نقول إن a_n **تساوي** b_n **تقاربياً** ونكتب $a_n \cong b_n$.

10. المنطق

189. المنطق الرمزي

المنطق هو العلم الصحيح الذي يبحث في قوانين الفكر والتفكير من أجل الوصول وبشكل صحيح من أولى درجات المعرفة أي من مرحلة اليقين إلى مرحلة ضرورة البرهان .

وقد وضع أرسطو قوانين الفكر الأساسية التي لا يمكن بدونها إنشاء أي بناء فكري . ولعل أرسطو حين وضع هذه القوانين قد وقع في مطبّ عدم برهان هذه القوانين وإثبات صحتها ، إذ اعتبر هذه القوانين هي مرحلة اليقين الأولى ، وقد أثبتت الدراسات السيكولوجية الحديثة أن الطفل في الشهر الأول يعي ويدرك ويستخدم قانون أرسطو الأول (قانون الهوية) ، الذي هو أساس للقانونين التاليين ، وهذا يعني أن القانون الأول باعتقادي مرتبط بوجود العقل بل هو صفة من صفات العقل السليم .

قوانين الفكر الأساسية

(a) **قانون الهوية** (الذاتية) وهو الذي يدرك فيه العقل بأن الشيء الموجود هو هو بذاته (ولا يمكن أن يكون شيئاً آخر) . ونعبر عن ذلك رمزياً بالشكل « A هي A » .

(b) **قانون عدم التناقض** وهو يكمل قانون الهوية الذي شرحناه (للعقل البشري) باستخدام قانون عدم التناقض .

وهذا القانون الذي يدرك فيه العقل أن الشيء لا يمكن أن يكون «هو وليس هو» في الوقت نفسه . أي لا يمكن أن تصحّ الصفة ونقيضها بآن واحد .

وهكذا نقول «لا يمكن أن تكون A ونقيض A في آن واحد» . فإذا رمزنا **لنقيض** A بـ $\sim A$ فالقانون يصبح :

«لا يكون A و $\sim A$ في الوقت نفسه» .

(c) **قانون الثالث المرفوع** وهو القانون الذي يدرك فيه العقل أنه لا ثالث لحالتي الوجود والعدم ، أي أن الشيء أما «هو» أو «ليس هو» ولا توجد حالة بينهما .

ونكتب القانون الثالث كما يلي : «أما A أو $\sim A$ » ولا توجد حالة وُسطى بينهما .

المنطق الرمزي هو نظرية رياضية تنتج عن تفاعل مجموعة المصادرات والمسلمات مع المنطق لخلق بناء منطقي مُرَمَّز نسقطه حيث نشاء لمزيد من الاستنباطات والاستنتاجات في العلوم المختلفة .

190. الرموز الأساسية ، القضايا

القضية هي عبارة خبرية (إخبارية) نرمز لها عموماً بالأحرف $p, q, r, \cdots$

ويمكن أن تتضمن العبارة ثوابت ومتغيرات ، حيث يكون للثابت معنى محدد ، وبحيث يرتبط المتغير فيها بمجموعة من القيم نسميها **منطقة القضية** .

وتحتمل القضية «الخطأ» أو «الصواب» عندما لا تحوي متغيرات كقولنا «إن $5 < 3$» . أما إذا كانت القضية تحوي متغيرات فإن كون القضية «خطأ» أو «صواب» يتعلق بمنطقة القضية .

جبر القضايا

191. القضايا المركبة الأساسية

القضية المركبة هي قضية مكوّنة من عدة قضايا بسيطة تربط بينها واحدة أو أكثر من أدوات الربط اللغوية المعروفة مثل «و ، ليس ، أو ، يكون ، كل ، بعض ، إذا ، إذا وفقط إذا ، . . .» .

ونورد فيما يلي القضايا المركبة الأساسية وصحتها وفقاً لمكوناتها .

وتجدر الإشارة إلى أن تسميات القضايا المركبة الأساسية قد بنيت على الطريقة التي تمت بها ربط القضايا البسيطة ببعضها .

1. **قضية العطف** . هي القضية المركبة « p و q » التي نرمز لها بـ $p \wedge q$ وتكون هذه القضية صحيحة عندما وفقط عندما تكون p و q صحيحتين معاً . **(الجداء المنطقي)** .

2. **قضية الإباحة** . هي القضية المركبة « p أو q » التي نرمز لها بـ $p \vee q$ والتي تكون صحيحة عندما وفقط عندما تكون واحدة على الأقل من القضيتين صحيحة . **(الجمع المنطقي)** .

3. **قضية الاقتضاء** . هي القضية المركبة «إذا p فإن q» ونرمز لها بـ $p \to q$ ، وتكون هذه القضية خاطئة عندما وفقط عندما تكون p صحيحة و q خاطئة . **(الجملة الشرطية)** .

4. **قضية التكافؤ** . هي القضية المركبة « p إذا وفقط إذا q » التي نرمز لها بـ $p \leftrightarrow q$ وتكون هذه القضية صحيحة عندما وفقط عندما تكون p و q صحيحتين معاً أو خاطئتين معاً .

5. **قضية النفي** . هي القضية «نقيض p » أو «نفي p » ونرمز لها بـ p' وتكون هذه القضية صحيحة عندما تكون p خاطئة ، وتكون p' خاطئة عندما تكون p صحيحة .

6. **قضية التخيير** . هي القضية المركبة « p أو q وليس p و q معاً» ونرمز لها بـ $p \veebar q$ ، وتكون هذه القضية صحيحة عندما وفقط عندما p صحيحة أو q صحيحة وليس كلاهما .

192. جداول الصدق (الصواب)

تمثل الرموز $\veebar, \leftrightarrow, \rightarrow, \wedge, \vee$ عمليات ثنائية منجزة على قضيتين ، بينما يمثل الرمز «$'$» عملية أحادية منجزة على القضايا . يمكن تلخيص تعاريف القضايا المركبة الأساسية بجداول نسميها **جداول الصدق** . ونشير في هذه الجداول بحرف T إلى الصواب وبحرف F إلى الخطأ للقضية الموافقة .

ونورد في الجدول جميع الحالات الممكنة لتركيب قضيتين بأحد الرموز السابقة .

الجدول 10.1 جدول الصدق للقضايا المركبة الأساسية

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	p'	$p \veebar q$
T	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T	T	F

193. اللغة والمنطق

عند تعريف القضايا المركبة الأساسية يمكن القول بأن التعريف الرياضي للقضية يستخدم اللغة ولكنه يبتعد أحياناً ويتطابق أحياناً أخرى مع المعنى اللغوي. وهكذا فعند الربط بالحرف « و » وبكلمة «نقيض» وبالعبارة «إذا وفقط إذا» نجد أن المعنى اللغوي يتطابق مع التعريف الرياضي.

أما عند الربط بالحرف «أو» فإن «أو» تحتمل معنى أحد الشيئين أو كلاهما وهنا نحصل على قضية الإباحة، فإذا لم يكن مسموحاً وقوع الشيئين معاً نحصل على قضية التخيير. ويشذ عن التطابق قضية الاقتضاء التي تحتوي بداخلها معنى رياضي غير متضمن تماماً في المعنى اللغوي.

194. القضية الارتكاسية

القضية الارتكاسية للقضية «إذا p فإن q» هي «إذا p' فإن q'»، حيث p' هي نفي p و q' هي نفي q. وهكذا فإن $p' \to q'$ هي القضية الارتكاسية للقضية $p \to q$.

195. القضية المكافئة العكسية

للقضية $p \to q$ هي القضية $q' \to p'$.

196. القضية المعاكسة

للقضية $p \to q$ هي القضية $q \to p$.

197. توابع الصدق

هي توابع متغيراتها هي القضايا وأدوات الربط فيها هي $\wedge$, $\vee$ ، ... الخ ويمكن تطبيق جداول الصدق وخواص أدوات الربط للحصول على قيم تابع الصدق.

198. قيم الصدق للقضايا المركبة

هي القيم التي تأخذها قضية مركبة من عدة قضايا وبأدوات ربط متنوعة ، ويتم الحصول على هذه القيم من جداول الصدق الأساسية .

199. المصدوقة

هي قضية مركبة من عدّة قضايا بشكل تبقى فيه هذه القضية صحيحة دوماً بغض النظر عن صحة أو خطأ القضايا المركِّبة لها . أما إذا كانت هذه القضية المركبة خاطئة دوماً نسميها عندئذٍ **المنقوضة** .

الجدول 10.2 بعض قوانين المنطق (المصدوقات)

من أجل أي ثلاث قضايا p, q, r وبغض النظر عن قيم الصدق لكلٍ منها فإن كلاً من القضايا التالية هي مصدوقة أي أن قيمة الصدق لكل منها هي T دوماً :

1. قانون الثالث المرفوع $p \vee p'$.
2. قانون التناقض $(p \wedge p')'$.
3. قانون القياس المنطقي

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

4. قانون نفي النفي $p \leftrightarrow (p')'$
5. قانون التكافؤ العكسي $(p \to q) \leftrightarrow (q' \to p')$

200. القضايا المتكافئة منطقياً

لتكن m و n قضيتين مركبتين أو أساسيتين تابعتين لمجموعة من القضايا $p, q, \ldots$. فإذا كان جدول الصدق لـ m متطابقاً مع جدول الصدق لـ n

وذلك من أجل جميع الحالات الممكنة لقيم الصدق المرتبطة بـ ... $p, q,$ قلنا إن m و n **متكافئتان منطقياً** . ونكتب عندئذٍ $m \leftrightarrow n$ أو $m \equiv n$.

مثال إن القضية $p \to q$ متكافئة منطقياً مع $q' \to p'$.

مثال إن القضية $(p')'$ متكافئة منطقياً مع p .

الجدول 10.3 أزواج القضايا المتكافئة منطقياً

من أجل أي قضيتين p و q تكون القضيتان m و n المبينتان في العمودين التاليين متكافئتان منطقياً أي $m \leftrightarrow n$.

m	$\longleftrightarrow$	n
$p \wedge q$		$(p' \vee q')'$
$p \to q$		$p' \vee q$
$p \leftrightarrow q$		$[(p' \vee q)' \vee (q' \vee p)']'$
$p \vee q$		$(p' \wedge q')'$
$p \to q$		$(p \wedge q')'$
$p \leftrightarrow q$		$(p \wedge q')' \wedge (q \wedge p')'$
$p \wedge q$		$(p \to q')'$
$p \vee q$		$p' \to q$
$p \leftrightarrow q$		$[(p \to q) \to (q \to p)']'$

201. المسوِّرات

بالإضافة إلى « و » ، «أو» ، . . . توجد عبارات مثل «من أجل جميع قيم x » و «يوجد x بحيث» ، نسمي مثل هذه العبارات **المسوِّرات** . ونستخدم الرمز $\forall$ للدلالة على «مهما يكن» أو «من أجل جميع قيم» . الذي نسميه **المسوِّر الشامل** ، كما نستخدم الرمز $\exists$ للدلالة على «يوجد عنصر على الأقل بحيث» . والذي نسميه **المسوِّر الوجودي** .

202. القضية الشاملة والوجودية

القضية الشاملة هي القضية «من أجل جميع العناصر $x, y, \ldots$ فإن p صحيحة» .

أما القضية الوجودية فهي «يوجد بعض العناصر $x, y, \ldots$ التي تكون من أجلها p صحيحة» .

203. قانونا دي مورغان

$$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q' \; ; \; (p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$$

حيث نعني بـ $\equiv$ التكافؤ المنطقي .

204. قوانين جبر القضايا

($\equiv$ التكافؤ المنطقي)

قانونا الجمود

$$p \vee p \equiv p \qquad\qquad p \wedge p \equiv p$$

قانونا التجميع

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

قانونا التبديل

$$p \vee q \equiv q \vee p \qquad\qquad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

قانونا التوزيع

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

قانونا العنصر المحايد

$$p \wedge T \equiv p \; , \; p \wedge F \equiv F \qquad\qquad p \vee F \equiv p \; , \; p \vee T \equiv T$$

قانونا المتمم

$p \wedge p' \equiv F$ $\qquad$ $p \vee p' \equiv T\ ,\ (p')' \equiv p$

حساب العلاقات

205. العلاقة

العلاقة هي شكل من أشكال الربط بين شيئين أو أكثر فإذا تم الربط بين عنصرين **فالعلاقة ثنائية** وإذا تم الربط بين ثلاثة عناصر **فالعلاقة ثالوثيّة** ، أما إذا تم الربط بين عدة عناصر **فالعلاقة تعدُّدية** . **ونعبر عن ارتباط العنصر** x بالعنصر y بالعلاقة R بالشكل $x R y$ وعن عدم ارتباط x بـ y وفق R بالرمز $x \not R y$. ونسمي x **السّلف** و y **الخلَف** بالنسبة لـ R . وبذلك تكون مجموعة تعريف R هي مجموعة كل الأسلاف ومدى R هي مجموعة الأخلاف .

206. الاحتواء

نقول إن العلاقة R محتواة في S ونكتب $R \subset S$ إذاً نتج عن ارتباط عنصرين بالعلاقة R ارتباطهما بالعلاقة S .

مثال . بفرض أن العددين x و y مرتبطان بالعلاقة R التي هي «أصغر من» ، وبفرض أن S هي العلاقة «مختلف عن» فإن $R \subset S$.

207. العلاقتان المتطابقتان

هما علاقتان R و S تتحققان معاً بين العناصر نفسها ونكتب $R = S$.

208. العلاقة الخالية والعلاقة الشاملة

العلاقة الخالية هي تلك العلاقة التي لا تتحقق بين أي عنصرين . أما العلاقة الشاملة فتلك التي تتحقق بين أي عنصرين .

209. اجتماع علاقتين

نعرّف اجتماع العلاقتين R و S بأنه تلك العلاقة $R \cup S$ التي تتحقق بين عنصرين إذا وفقط إذا تحققت علاقة واحدة على الأقل بين هذين العنصرين .

210. تقاطع علاقتين

نعرّف تقاطع العلاقتين R و S بأنه تلك العلاقة $R \cap S$ التي تتحقق إذا وفقط إذا تحققت كلٌ من العلاقتين بين أي عنصرين .

211. نفي العلاقات

نعرّف علاقة النفي R' للعلاقة R بأنها تلك العلاقة التي تتحقق بين أي عنصرين إذا وفقط إذا لم تتحقق R بين هذين العنصرين .

212. التطابق والاختلاف

إذا تطابق عنصران x و y قلنا إن العلاقة التي تربطهما هي **علاقة التطابق** ونكتب $x \, I \, y$ أما إذا اختلفا فإن العلاقة التي تربطهما هي **علاقة الاختلاف** ونكتب $x \, D \, y$.

الجدول 10.4 خواص العلاقات

نورد في الجدول التالي الخواص التي يمكن أن تحققها العلاقات مع التسمية الخاصة بها والشرط اللازم لتحقق هذه الخواص .

لتكن x, y, z ثلاثة عناصر من مجموعة K

تسمية العلاقة R	الشرط الواجب تحققه بالنسبة لـ K
مُنعكِسة	مهما تكن x فإن $x\,R\,x$
لا منعكسة تماماً	مهما تكن x فإن $x \not R\, x$
لا منعكسة	$x\,R\,x$ من أجل بعض وليس كل x و $x \not R\, x$ من أجل بعض وليس كل x .
متناظرة	مهما تكن x و y فإن $x\,R\,y \rightarrow y\,R\,x$
لا متناظرة تماماً	مهما تكن x و y فإن $x\,R\,y \rightarrow y \not R\, x$
قطرية التناظر	مهما تكن x و y فإن $x\,R\,y$ و $y\,R\,x \rightarrow x = y$
لا متناظرة	$x\,R\,y \rightarrow y\,R\,x$ من أجل بعض وليس كل y , x و $x\,R\,y \rightarrow y \not R\, x$ من أجل بعض وليس كل y , x
متعدّية	مهما تكن x, y, z فإن $x\,R\,y$ و $y\,R\,z \rightarrow x\,R\,z$
لا متعدية تماماً	مهما تكن x, y, z فإن $x\,R\,y$ و $y\,R\,z \rightarrow x \not R\, z$
لا متعدية	من أجل بعض وليس كل x,y,z يكون $x\,R\,y$ و $y\,R\,z \rightarrow x\,R\,z$ ومن أجل بعض وليس كل x,y,z يكون $x\,R\,y$ و $y\,R\,z \rightarrow x \not R\, z$
متّصلة	مهما تكن x,y بحيث $x \neq y$ يكون $x\,R\,y$ أو $y\,R\,x$
متّصلة بقوة	مهما تكن x,y يكون $x\,R\,y$ أو $y\,R\,x$

213. العكس

إن علاقة العكس R' للعلاقة R هي تلك العلاقة التي تتحقق بين العنصرين x و y إذا وفقط إذا تحققت العلاقة R بين العنصرين y و x .

214. خواص العلاقات

يوضح الجدول 10.4 الخواص التي يمكن أن تحققها العلاقات ، ويمكن لبعض العلاقات أن تحقق أكثر من خاصة ، كما سيرد في الجدول 10.5 .

215. علاقات الترتيب

نقول بأن المجموعة K مرتّبة وفق العلاقة الثنائية R (انظر الجدول 10.6) إذا كانت R تحقق إحدى مجموعات خواص علاقة الترتيب المبينة في الجدول 10.6 .

216. استقلال الخواص

يمكن القول إن مجموعات الخواص المرتبطة بالانعكاس والتناظر والتعدي هي مجموعات مستقلة .

الجدول 10.5 أمثلة على العلاقات وخواصها المميزة

العلاقة	الخواص
«والد لـ»	لا متناظرة تماماً لا متعدية تماماً
«أخ لـ»	لا متناظرة
«معجب بـ»	لا منعكسة، لا متناظرة، لا متعدية
«متزوج من»	متناظرة
«يقتضي»	لا متناظرة

«إبن لـ»	لا منعكسة تماماً، لا متناظرة تماماً
«أكبر من»	لا منعكسة تماماً، لا متناظرة تماماً، متعدية
«أصغر من»	لا منعكسة تماماً، لا متناظرة تماماً، متعدية
«مختلف عن»	لا منعكسة تماماً ، متناظرة
«مُحتوى في»	منعكسة ، متعدية
«أكبر سناً من»	لا منعكسة تماماً، لا متناظرة تماماً، متعدية ليس بالضرورة متصلة .
«مكافىء لـ»	منعكسة ، متناظرة ، متعدية
«بين»	علاقة ثالوثية .

الجدول 10.6 أنواع الترتيب

نوع الترتيب	خواص العلاقة R
شبه المرتّب	منعكسة ، متعدية
ترتيب جزئي	منعكسة ، قطرية التناظر ، متعدية
ترتيب بسيط	قطرية التناظر ، متعدية ، متصلة بقوة
ترتيب جزئي قطعي (صارم)	لا متناظرة تماماً ، متعدية
ترتيب بسيط قطعي (صارم)	لا متناظرة تماماً ، متّصلة ، متعدية

الجدول 10.7 أمثلة على الترتيب

نوع الترتيب	العلاقة
شبيه المرتب	«هو على الأقل بطول» لمجموعة أشخاص
ترتيب جزئي	«محتوى في» لمجموعة كل المجموعات
ترتيب بسيط	« $\leqslant$ » في مجموعة كل الأعداد الحقيقية
ترتيب جزئي قطعي (صارم)	«أطول من» في مجموعة كل الناس
ترتيب بسيط قطعي (صارم)	« $<$ » في مجموعة كل الأعداد الحقيقية .

217. علاقات التكافؤ

تسمى العلاقة الثنائية R على مجموعة العناصر K **علاقة تكافؤ** إذا كانت العلاقة منعكسة ومتناظرة ومتعدية . ونرمز لهذه العلاقة عادة بالرمز $\approx$.

أمثلة . كل العلاقات التالية هي علاقات تكافؤ . «مشابه لـ» «مطابق لـ» ، «له نفس عُمْر» ، «يساوي» ، «يوازي» .

تُجزيء علاقة التكافؤ $\approx$ عناصر المجموعة K إلى مجموعات جزئية تسمى أصناف أو صفوف التكافؤ بحيث تكافىء جميع عناصر كل مجموعة جزئية عنصراً واحداً منها .

وإذا اشترك صنفا تكافؤ بعنصر فإنهما يمثلان صنف تكافؤ واحد . وهكذا فإن كل صنفي تكافؤ هما إما منفصلان أو متساويان .

11. البنى الجبرية

الـزُّمَــــر

218. النظام الرياضي النموذجي

يتكون النظام الرياضي النموذجي M من مجموعة من العناصر $a, b, c, \ldots$ وعلاقة تساوي وعمليات محددة . وتفصل علاقة التساوي العناصر إلى صنفين ، حيث يكون العنصران a , b متساويين إذا انتميا لنفس الصنف . كما تتميز علاقة التساوي بالخواص التالية :

(i) **مُعيِّنة** أي أنه إما $a = b$ أو $a \neq b$.

(ii) **منعكسة** $a = a$.

(iii) **متناظرة** إذا كان $a = b$ فإن $b = a$.

(iv) **متعدية** إذا كان $a = b$ و $b = c$ فإن $a = c$. (انظر 214) .

219. العملية الثنائية (قانون التشكيل)

هي الطريقة التي نربط بواسطتها كل زوج مرتب a و b من مجموعة M بعنصر وحيد c من مجموعة N ، ونرمز للعملية بالرمز «$\circ$» ونكتب $a \circ b = c$.

فإذا كانت $N \subseteq M$ قلنا إن **العملية الثنائية داخلية** وإن M **مغلقة** بالنسبة للعملية ∘ . وتتميز العملية ∘ بكونها **فعليّة** أو **حسنة التعريف** بالنسبة لعلاقة التساوي إذا أمكن تبديل العنصر c بآخر مساوٍ له عندما نبدل a أو b أو كلاهما بالعنصر المساوي .

ملاحظة . إن المقصود بالزوج المرتب هو أن العملية معرّفة باتجاه واحد أي أن العنصر المقابل لـ a و b ليس بالضرورة هو نفسه المقابل لـ b و a عبر هذه العملية .

220. الزُّمر

الزمرة هي مجموعة G نعرّف عليها عملية ثنائية ∘ بحيث تتحقق الشروط التالية ، وذلك من أجل أي ثلاثة عناصر a, b, c من G :

1. **الإغلاق** . إن $a \circ b$ هو عنصر وحيد c ينتمي إلى G .
2. **قانون التجميع** . $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
3. **العنصر المحايد** . يوجد في G عنصر i ، يسمى المحايد (أو الواحد) بحيث يتحقق $a \circ i = a$ وذلك من أجل أي $a \in G$.
4. **العنصر المعاكس (النظير)** من أجل أي a في G يوجد عنصر في G نسميه العنصر المعاكس (النظير) لـ a ونرمز له بـ a^{-1} بحيث $a \circ a^{-1} = i$.

الزمرة التبديلية . (الآبليه) هي زمرة تحقق الشرط الإضافي التالي :

5. **التبديلية** . $a \circ b = b \circ a$.

ملاحظة . من أجل سهولة متابعة النص سوف نستخدم الحرف G للإشارة إلى الزمرة أو إلى مجموعة عناصر الزمرة .

221. تتمات في الزمر

الزمرة المنتهية . هي زمرة تتألف من عدد منته من العناصر . **مرتبة الزمرة المنتهية** هي عدد عناصر هذه الزمرة .

الزمرة الجزئية من المجموعة G هي مجموعة عناصر من G قد تكون G بكاملها تشكل بحد ذاتها زمرة بالنسبة للعملية $\circ$ نفسها . **الزمرة الجزئية الفعلية** هي زمرة جزئية مختلفة عن G وعن المحايد (أي أن عناصرها ليست G بكاملها ، وتحتوي على أكثر من عنصر) ، فإذا سمحنا للزمرة الجزئية أن تكون G أو أن تتكون من المحايد نسميها الزمرة **الجزئية غير الفعلية** .

تقاطع زمرتين لتكن G_1 و G_2 زمرتين جزئيتين من G فإن مجموعة العناصر المشتركة بين G_1 و G_2 تشكل بحد ذاتها زمرة بالنسبة للعملية الثنائية $\circ$ نفسها وتسمى زمرة التقاطع ويرمز لها بـ $G_1 \wedge G_2$.

نرمز للسهولة بـ a^2 لناتج العملية $a \circ a$ ومن الطبيعي أن نرمز بـ a^n للناتج $a \circ a \circ \ldots \circ a$ الذي يظهر فيه a ، n مرة . ونسمي ذلك **تكرار العنصر** a .

دور a هو أصغر عدد صحيح موجب r تتحقق من أجله المساواة $a^r = i$. **العناصر المستقلة** في زمرة هي مجموعة العناصر T التي لا يمكن التعبير عن أيٍ منها بدلالة العناصر الأخرى من T عبر العملية $\circ$ مع السماح بأي تكرار للعنصر الواحد .

المولِّدات المستقلة لـ G هي مجموعة العناصر المستقلة T التي يمكن التعبير بواسطتها (وبتكرار منته للعملية $\circ$) عن أي عنصر من G . **الزمرة**

الدوروية هي تلك الزمرة التي يتم توليدها من عنصر وحيد .

أمثلة إن كلاً من المجموعات التالية مع العملية الثنائية المرفقة بها تشكل زمرة .

(a) مجموعة الأعداد الصحيحة ، عملية الجمع ، العنصر المحايد هو 0 ، العنصر المعاكس لـ a هو $-a$.

(b) مجموعة الأعداد الكسرية الموجبة ، عملية الضرب ، العنصر المحايد هو 1 .

(c) مجموعة الأحرف ℓ, m, n ، عملية التباديل .

(d) مجموعة الدورانات في المستوي حول المبدأ

$$R : x' = x \cos\theta + y \sin\theta \quad \text{و} \quad y' = -x \sin\theta + y \cos\theta$$

العملية هي تركيب الدورانات .

222. نظريات حول الزمر

لدينا من أجل أي $a, b, c, \ldots$ في زمرة G :

(a) $a \circ i = i \circ a = a$ **(b)** $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = i$

(c) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ **(d)** $(a^{-1})^{-1} = a$

(e) العنصر المحايد i وحيد .   **(f)** العنصر المعاكس لـ a وحيد .

(g) إذا كان $a \circ b = a \circ c$ فإن $b = c$.

(h) إذا كان $b \circ a = c \circ a$ فإن $b = c$.

(i) يوجد للمعادلة $a \circ x = b$ حل وحيد هو $a^{-1} \circ b$ في G .

(j) يوجد للمعادلة $y \circ a = b$ حل وحيد هو $b \circ a^{-1}$ في G .

(k) إذا كان $a = b$ فإن $a \circ c = b \circ c$ من أجل أي c من G .

(ℓ) إذا كان $a = b$ و $c = d$ فإن $a \circ c = b \circ d$.

(m) إذا كان a عنصراً من زمرة منتهية ، فإنه يوجد عدد صحيح موجب r بحيث $a^r = i$ و $a^{-1} = a^{r-1}$.

(n) إن مرتبة زمرة جزئية من زمرة G قاسم لمرتبة G .

(o) يوجد لكل زمرة منتهية مجموعة من المولدات المستقلة .

جبر الأعداد الصحيحة الموجبة

223. الجمع

الذي نرمز له بـ + ونقابل فيه كل عددين صحيحين a و b موجبين **بمجموعهما** c ونكتب $c = a + b$. وتحقق هذه العملية الخواص 1, 2, 3 من الجدول 11.1 .

الضرب هو عملية ثنائية نقابل بواسطتها كل عددين صحيحين a و b بعدد c نسميه **حاصل الضرب** ونكتب $c = a \times b$. وتحقق عملية الضرب الخواص 4, 5, 6 من الجدول 11.1 .

القانون التوزيعي تحقق عمليتا الضرب والجمع القانون 7 من الجدول 11.1 .

224. جبر أنواع أخرى من المجموعات

في الواقع يمكن المحافظة على عملية الجمع وعملية الضرب المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة . وتغيير المجموعة التي يمكن أن نعرف عليها عملية الجمع

وعملية الضرب نفسها ، كأن نأخذ مجموعة الأعداد الحقيقية ، أو مجموعة كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقية للمتغير الحقيقي x ، وتبقى الخواص المبينة في الجدول 11.1 صحيحة .

الجدول 11.1 الخواص الأساسية للعمليتين الثنائيتين الجمع والضرب للأعداد الصحيحة الموجبة

لتكن a, b, c أعداداً اختيارية من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ولنفرض أن الرمز = يعني التطابق فإن الخواص التالية تتحقق :

1. قانون الاغلاق في الجمع $a + b$ هو عدد صحيح موجب .
2. القانون التبديلي للجمع $a + b = b + a$.
3. القانون التجميعي للجمع $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. قانون الإغلاق للضرب $a \times b$ هو عدد صحيح موجب .
5. القانون التبديلي للضرب $a \times b = b \times a$.
6. القانون التجميعي للضرب $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
7. القانون التوزيعي للضرب والجمع

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

225. الشروط العامة لبناء جميع أنواع البنى الجبرية

نورد في الجدول التالي مجموعة الشروط التي لو توفرت أي مجموعة جزئية منها لحصلنا على بنية جبرية ، وسنورد في 226 أمثلة على ذلك .

الجدول 11.2 مجموعة الشروط (المبادىء) التي يعني تحقُّق بعضاً منها الحصول على بنية جبرية

لتكن S مجموعة العناصر $a, b, c, \ldots$ ولنرمز بـ $\oplus$ و $\otimes$ لعمليتين ثنائيتين على المجموعة S . نفرض أيضاً أن الرمز = يعني التطابق أي أن $a = b$ تعني أن a هو العنصر b نفسه بينما تعني $a \neq b$ أن a و b مختلفان . نسمي $\oplus$ عملية «الجمع» و $\otimes$ عملية «الضرب» ، واستخدام كلمتي الجمع والضرب هنا لا يعني بالضرورة الجمع والضرب العاديين . وندخل أيضاً التسميات الرمزية للشروط لتسهيل التعامل معها .

من أجل أي $a, b, c, \ldots$ من S نعرّف ما يلي :

.A_1 **الاغلاق** . $a \oplus b$ هو عنصر وحيد من S .

.A_2 **الخاصة التجميعية** . $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

.A_3 **العنصر المحايد** . يوجد في S عنصر z يسمى العنصر المحايد بحيث $a \oplus z = a$ من أجل أي a من S .

.A_4 **العنصر المعاكس عبر** $\oplus$. من أجل أي $a \in S$ يوجد عنصر $\overline{a}$ في S يسمى العنصر المعاكس لـ a بالنسبة للعملية $\oplus$ وبحيث $a \oplus \overline{a} = z$. نرمز أحياناً للعنصر المعاكس بالرمز $(-a)$.

.A_5 **الخاصة التبديلية** . $a \oplus b = b \oplus a$

.M_1 **الاغلاق** . $a \otimes b$ هو عنصر وحيد من S .

.M_2 **الخاصة التجميعية**. $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$

.M_3 **العنصر المحايد** . يوجد في S عنصر u يسمى العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\otimes$ وبحيث $a \otimes u = a$ من أجل أي عنصر $a \in S$.

$.M_4$ **العنصر المعاكس عبر** $\otimes$. من أجل أي عنصر $a \in S$ ما عدا z يوجد عنصر a^{-1} في S نسميه العنصر المعاكس لـ a بالنسبة للعملية $\otimes$ وبحيث $a \otimes a^{-1} = u$.

$.M_5$ **الخاصة التبديلية** . $a \otimes b = b \otimes a$

$.M_6$ **لا قواسم فعلية** . لا تحتوي المجموعة S على قواسم فعلية للصفر .

$.D_1$ **قانون التوزيع من اليسار لـ** $\otimes$ **على** $\oplus$.

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

$.D_2$ **قانون التوزيع من اليمين لـ** $\otimes$ **على** $\oplus$

$$(b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$$

$.C_1$ **قانون الحذف من اليسار للعملية** $\otimes$ إذا كان $c \neq z$ و $c \otimes a = c \otimes b$ فإن $a = b$.

$.C_2$ **قانون الحذف من اليمين للعملية** $\otimes$ إذا كان $c \neq z$ و $a \otimes c = b \otimes c$ فإن $a = b$.

قوانين الترتيب

$.O_1$ يوجد مجموعة جزئية P محتواة في S بحيث لو كان $a \neq z$ لكان a أو $\overline{a}$ موجوداً في P وليس كلاهما .

$.O_2$ إذا كان a و b في P فإن $a \oplus b$ في P .

$.O_3$ إذا كان a و b في P فإن $a \otimes b$ في P .

تعريف الزمرتين $\circledgt$ و $\circledlt$. نسمي جميع عناصر P **بالعناصر الموجبة** لـ S ، بينما نسمي باقي عناصر S الأخرى ما عدا **الصفر** z **بالعناصر**

السالبة . فإذا كان a و b عنصرين من S وكان $a \oplus \overline{b}$ موجباً فإننا نكتب $a \otimes b$ و $b \oslash a$.

قواسم الصفر . إذا كان $a \otimes b = z$ و $b \neq z$ فإننا نسمي a **قاسماً للصفر** . فإذا كان $a \neq z$ سميناه **قاسماً فعلياً للصفر** . وهكذا فالأعداد المغايرة للصفر والتي تحقق $a \oplus b = z$ تسمى **قواسم الصفر** .

226. مجموعات الشروط الموافقة لأنواع متعددة من البنى الجبرية

نورد فيما يلي بعض البنى الجبرية ومجموعات الشروط التي يجب أن تتوافر ، وننبه إلى أنه يمكن تقليل بعض الشروط في عدد من الحالات .

الجبرية البسيطة العادية . يجب توفر جميع الشروط المذكورة والتي عددها 18 شرطاً .

الزمرة . من M_1 حتى M_4 ، فإذا تحقق M_5 فالزمرة تبديلية .

الحقل . A_1 حتى A_5 و M_1 حتى M_5 و D_2 و D_1 .

الحقل المرتب . $A_1 - A_5$, $M_1 - M_5$, D_2 , D_1 , $O_1 - O_3$.

الحقل اللا تبديلي . $A_1 - A_5$, $M_1 - M_4$, D_2 , D_1 .

الحلقة . $A_1 - A_5$, M_2 , M_1 , D_2 , D_1 .

الحلقة التبديلية . هي حلقة تحقق شرطاً إضافياً هو M_5 .

حلقة بعنصر محايد . هي حلقة تحقق شرطاً إضافياً هو M_3 .

المجال الكامل . $A_1 - A_5$ و M_1, M_2, M_3, M_5 ؛ C_1, C_2 ؛ D_1, D_2 .

227. تعاريف البنى بشكل آخر

يمكن تعريف بعض البنى الجبرية الواردة أعلاه بشكل آخر يجعلها أكثر وضوحاً واختصاراً .

الحقل هو مجموعة S تحوي عنصرين على الأقل نعرّف عليها عمليتين ثنائيتين $\oplus$ و $\otimes$ بحيث تتحقق الشروط الثلاثة التالية : **(1)** عناصر S تشكل زمرة تبديلية بالنسبة للجمع $\oplus$. **(2)** تشكل عناصر S المغايرة للصفر زمرة تبديلية بالنسبة للضرب $\otimes$. **(3)** الضرب توزيعي على الجمع .

ويكون الحقل **حقلاً مرتباً إذا تحقق** O_1, O_2, O_3 .

الحلقة . هي مجموعة R مكونة من عنصرين على الأقل نعرّف عليها عمليتين ثنائيتين $\oplus$ و $\otimes$ بحيث تتحقق الشروط التالية :

(1) تشكل عناصر R زمرة تبديلية بالنسبة للجمع $\oplus$. حيث نرمز للعنصر المحايد بـ z ولمعاكس a بـ $-a$. **(2)** الضرب توزيعي على الجمع . **(3)** الضرب تجميعي .

المجال الكامل D هو حلقة تبديلية بعنصر محايد . لاحظ أن المجال الكامل ليس بالضرورة أن يكون حقلاً لأننا وضعنا M_6 هنا بدلاً من M_4 .

الحقل اللاتبديلي هو حلقة ذات عنصر محايد تحقق M_4 .

أمثلة . العمليتان المعرفتان هنا هما الجمع العادي والضرب العادي .

الحقل : (a) مجموعة الأعداد الكسرية . (b) مجموعة الأعداد الحقيقية . (c) مجموعة الأعداد من الشكل $a + b\sqrt{2}$ حيث a و b كسريان .

الحلقة : (a) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة والصفر . (b) مجموعة الأعداد الصحيحة **مقاس** m . (c) مجموعة الأعداد الزوجية .

المجال الكامل : (a) كثيرات الحدود التي أمثالها تنتمي إلى مجال كامل . (b) مجموعة الأعداد $a + b\sqrt{2}$ حيث a و b صحيحان .

228. نظريات متعلقة بالحقول

لتكن $a, b, c, \ldots$ عناصر حقل F ، z العنصر المحايد بالنسبة للضرب و u المحايد بالنسبة للجمع ، وليكن $-a$ العنصر المعاكس لـ a بالنسبة للجمع و a^{-1} العنصر المعاكس لـ a بالنسبة للضرب . عندئذٍ تصح النظريات التالية :

(a) $a \otimes b = z$ إذا وفقط إذا $(a = z)$ أو $(b = z)$ أو $(a = z$ و $b = z)$.

(b) يوجد للمعادلة $a \oplus x = b$ حل وحيد في F .

(c) يوجد للمعادلة $a \otimes x = b$ حل وحيد في F إذا كان $a \neq z$.

(d) إذا كان $a = b$ و $c = d$ فإن $a \oplus c = b \oplus d$.

(e) إذا كان $a = b$ و $c = d$ فإن $a \otimes c = b \otimes d$.

(f) $[-(-a)] = a$

(g) $[a^{-1}]^{-1} = a$ بشرط $a \neq z$.

(h) $a \otimes z = z$ من أجل أي a من F .

(i) $a \otimes (-b) = -(a \otimes b)$

(j) $(-a) \otimes (-b) = a \otimes b$

229. نظريات متعلقة بالمجالات الكاملة

لتكن $a, b, c, \ldots$ عناصر من المجال الكامل D فإن :

(a) العنصر الصفري z وحيد .

(b) عنصر الواحدة (المحايد الضربي) u وحيد .

(c) إذا كان $a \oplus b = a \oplus c$ فإن $b = c$.

(d) المعاكس الجمعي $\overline{a}$ للعنصر a وحيد .

(e) يوجد للمعادلة $a \oplus x = b$ حل وحيد فقط .

(f) من أجل عنصر a في D لدينا $a \otimes z = z \otimes a = z$.

(g) من أجل عنصرين a و b من D لدينا $\overline{a} \otimes \overline{b} = a \otimes b$

(h) $a \otimes b = z$ إذا وفقط إذا كان $(a = z)$ أو $(b = z)$ أو ($a = z$ و $b = z$) .

230. نظريات متعلقة بالحلقات

بغية عدم التكرار نقول إن معظم النظريات المتعلقة بالمجال الكامل والتي لا تتعلق بقانون الحذف أو القانون التبديلي تصح من أجل الحلقات .

231. التوابع المعرفة على البنى الجبرية

لتكن لدينا S_1 بنية جبرية مزودة بالعمليات $T_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ و S_2 بنية جبرية مزودة بالعمليات $T_2 = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ ولنفرض أنه يوجد تابع غامر h معرّف على T_1 ويأخذ قيمة في T_2 .

التشاكل (الهومومورفيزم) هو تابع f معرف على S_1 ويأخذ قيمة في S_2 بحيث يتحقق الشرط :

$$f(a \circ b) = f(a) * f(b)$$

وذلك من أجل أي عنصرين a و b من S_1 ، حيث $\circ$ هي إحدى عمليات المجموعة T_1 و $*$ هي العملية المقابلة لها من T_2 وفق h . فإذا كان

f متبايناً فإننا نسميه **تشاكلاً متبايناً** (مونومورفيزم) ، وإذا كان f غامراً نسميه **تشاكلاً غامراً** (ابيمورفيزم) ، أما إذا كان f متبايناً وغامراً فإننا نسميه **تماثلاً** ، (أيزومورفيزم) **فالتماثل** هو تشاكل غامر ومتباين . . إذا كانت $S_2 = S_1$ فإننا نسمي f **تشاكلاً داخلياً** (إندومورفيزم) فإذا كانت $S_1 = S_2$ و f تقابلاً (غامراً ومتبايناً) نسمي f **تماثلاً ذاتياً** (أوتومورفيزم) .

232. التماثل التفاضلي (دِفيومورفيزم) والتماثل المستمر .

التماثل التفاضلي هو تماثل قابل للمفاضلة ومعكوسه قابل للمفاضلة . **التماثل المستمر** نقول إن التابع $f : X \rightarrow Y$ بين الفضاءين الطوبولوجيين X و Y تماثل مستمر إذا كان f تقابلاً (غامراً ومتبايناً) وكان كلٌّ من f و f^{-1} مستمرين .

جبر بول

233. الشروط الواجب توفرها لبناء جبر بول

جبر بول هو مجموعة B من العناصر $a, b, c, \ldots$ مزوّدة بعمليتين ثنائيتين **نرمز لهما بـ** $\cap$ و $\cup$ ونسميهما **الجداء المنطقي** و **الجمع المنطقي** على الترتيب وبحيث تتحقق الشروط التالية من أجل جميع عناصر B :

1. $a \cup b$ هو عنصر وحيد في B و $a \cap b$ هو عنصر وحيد في B . (الإغلاق)
2. $a \cup b = b \cup a$ و $a \cap b = b \cap a$ (الخاصة التبديلية) .
3. يوجد عنصران في B هما z (الصفري) و u (الواحدي) بحيث
$$a \cup z = a \quad و \quad a \cap u = a \quad و \quad z \neq u$$
4. (الخاصة التوزيعية) $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$

- و - $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$

5. يوجد من أجل أي عنصر a عنصر a' في B بحيث $a \cup a' = u$ و $a \cap a' = z$ (a' متمم a).

ملاحظة 1. إن الرمزين $\cap$ و $\cup$ لا يعنيان بالضرورة الاجتماع والتقاطع .

ملاحظة 2. يفضل بعض المؤلفين اعتبار ($'$) احدى العمليات المعرّفة على B والمحققة للشرط 5. وتسمى عادة عملية **التتميم** .

234. مثال هام

تشكل مجموعة جميع أجزاء مجموعة معطاة B مع عمليتي الاجتماع $\cup$ والتقاطع $\cap$ **جبر بول** . حيث ... $a, b, c,$ هنا هي المجموعات الجزئية ، z هو المجموعة الخالية ϕ و u هو المجموعة الشاملة I .

235. نظريات متنوعة

تبقى جميع النظريات الواردة في 161 صحيحة إذا وضعنا فيها $a, b, c, \ldots,$ z, u بدلاً من $A, B, C, \ldots, \phi, I$

مبدأ التنويه تبقى جميع النظريات في جبر بول صحيحة عندما نبادل بين $\cap$ و $\cup$ ونبادل z و u ونبادل بين $\subset$ و $\supset$.

235. خواص إضافية

$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$ (قانون التجميع)

$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$ (قانون التجميع)

$a \cup a = a, a \cap a = a$ (خاصة الجمود)

$a \cup u = u, a \cap z = z$

$a \cap u = a, a \cup z = a$

$a \cap (a \cup b) = a$ (قانون الامتصاص)
$a \cup (a \cap b) = a$ (قانون الامتصاص)
a' وحيد .
$(a \cup b)' = a' \cap b'$ (التثنية)
$(a \cap b)' = a' \cup b'$ (التثنية)
$(a')' = a, u' = z, z' = u$
$a \cup (a' \cap b) = a \cup b$
$(a \cap b) \cup (a \cap c) \cup (b \cap c') = (a \cap c) \cup (b \cap c')$

237. تعريف الاحتواء $\subset$ في جبر بول

ليكن a, b عنصرين من B فإن $a \subset b$ إذا وفقط إذا كان $a \cup b = b$.

نظريات متنوعة بفرض $a, b, c, \ldots$ عناصر من B فإن :

(a) $\forall a \, , a \subset a$ (الانعكاس) .

(b) إذا كان $a \subset b$ و $b \subset a$ فإن $a = b$. (التناظر القطري) .

(c) إذا كان $a \subset b$ و $b \subset c$ فإن $a \subset c$. (التعدي) .

(d) إن عناصر جبر بول مرتبة جزئياً بالنسبة للعلاقة $\subset$.

(e) $z \subset a \subset u$ من أجل أي عنصر a من B . (الحد الشامل) .

(f) إذا كان $a \subset x$ و $b \subset x$ حيث $x \in B$ فإن $(a \cup b) \subset x$.

(g) إن $a \cup b = b$ إذا وفقط إذا $a \cap b = a$ (الاتّساق) .

(h) إن $a \subset b$ إذا وفقط إذا $a \cap b = a$. (الاتّساق) .

238. توابع بول

نسمى x **متغيراً** في جبر بول B إذا كان بامكان x أن يساوي أي عنصر من B .

لتكن لدينا المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ في جبر بول B . فإن تابع بول (كثير

حدود بول) هو عبارة يتم تشكيلها من $x_1, x_2, \ldots, x_n$ باستخدام العمليات $\cup$ و $\cap$ و ($'$) (عملية التتميم) .

كثير الحدود الأصغري في المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هو جداء منطقي من n حرفاً بحيث يظهر في الموقع i المتغير x_i أو متممّه x_i .

239. جبر القياس

نقول إن جبر بول B المكون من العناصر $A_1, A_2, A_3, \ldots$ **جمعي تماماً** إذا وفقط إذا كان أي مجموع $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ معرفاً بشكل وحيد في B .

إن جبر بول الجمعي تماماً B هو **جبر قياس** إذا وفقط إذا كان يوجد **تابع قياس** M ذو قيم حقيقية معرّف من أجل أي عنصر A من B وبحيث

$$M(A) \geqq 0 \qquad M(0) = 0$$
$$M(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = M(A_1) \cup M(A_2) \cup \cdots$$

من أجل أي مجموعة قابلة للعد من العناصر المنفصلة $A_1, A_2, \ldots$.

وتشير $M(A)$ هنا إلى **قيمة** القياس M المسندة إلى العنصر A .

240. جبر الأحداث المرتبطة بتجربة معطاة

لتكن S مجموعة جميع نتائج تجربة معنية . **الحدث** E هو مجموعة جزئية من S .

ليكن E_1 , E_2 حدثين فإنه يمكن تعريف **اجتماع أو تقاطع** هذين الحدثين كما نعرّف اجتماع أو تقاطع مجوعتين تماماً ، ونكتب $E_1 \cup E_2$ أو $E_1 \cap E_2$.
نعرّف **متمم الحدث** E بأنه مجموعة النتائج غير المنتمية إلى E ، ونرمز للمتمم بالشكل E' . وهكذا فإن $E' \cup E = S$ و $E' \cap E = \phi$.

الحدث الأكيد I هو المجموعة S . **الحدث المستحيل** ϕ هو الحدث الذي لا يحتوي أي عنصر من S ونكتب $S' = \phi$.

وقوع الحدث E نقول إن الحدث E قد وقع إذا كانت النتيجة التي حصلنا عليها عند اجراء التجربة ، منتمية إلى E .

241. تعاريف

نقول إن الحدثين E_1 , E_2 **متنافيان** أو منفصلان إذا وفقط إذا $E_1 \cap E_2 = \phi$. ويكون الحدث E_1 محتوى في E_2 ونكتب $E_1 \subset E_2$ إذا وفقط إذا كان $E_1 \cup E_2 = E_2$. وبصورة أخرى نقول إن $E_1 \subset E_2$ إذا وفقط إذا كان وقوع E_1 يقتضي وقوع E_2 .

نظرية . إن $E_1 \subset E_2$ إذا وفقط إذا كان $E_1 \cap E_2 = E_1$ أي إذا وفقط إذا كان وقوع E_1 يكافىء وقوع E_1 و E_2 معاً .

نظرية . من أجل أي حدث E لدينا $\phi \subset E \subset I$.

242. تعريف

إذا كان للمجموعة B التي تحوي عنصرين هما S والحدث المستحيل ϕ بنية جبر بول الجمعي التام وكانت تحقق جميع الصفات الموجودة في 233 و 239 فإننا نسمي B **جبر الأحداث** المرتبطة بتجربة معطاة .

243. التشاكل بين جبر الأحداث وجبر بول لقيم الصدق

لنفرض أن $\mathscr{B}$ هو جبر الأحداث وأن $\mathscr{T}$ هو جبر بول لقيم الصدق . حيث نأخذ قيمة الصدق $T[E]$ مساوية 1 إذا وقع الحدث E (أي إذا كانت E صحيحة) ، ومساوية 0 إذا لم يقع E (أي E خاطئة) . ولنفرض أن I ترمز إلى

الحدث الأكيد و Φ ترمز إلى الحدث المستحيل . تُعطى العلاقة بين الجبرين $\mathcal{T}$ و $\mathcal{B}$ بالتشاكل

$$T[I] = 1 \qquad T[\emptyset] = 0 \qquad (1)$$
$$T[E_1 \cup E_2] = T[E_1] \oplus T[E_2] \qquad T[E_1 \cap E_2] = T[E_1] \otimes T[E_2]$$

ويبين الجدولان 11.3 و 11.4 قيم الصدق للحدثين $E_1 \cap E_2$ و $E_1 \cup E_2$ وقيم الصدق T . والعمليات الحسابية عليها .

الجدول 11.3 جدول الصدق

E_1	E_2	$E_1 \cup E_2$	$E_1 \cap E_2$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	F

الجدول 11.4 الحساب على قيم الصدق

$T[E_1]$	$\oplus$	$T[E_2]$	$=$	$T[E_1 \cup E_2]$	$T[E_1]$	$\otimes$	$T[E_2]$	$=$	$T[E_1 \cap E_2]$
1	$\oplus$	1	=	1	1	$\otimes$	1	=	1
1	$\oplus$	0	=	1	1	$\otimes$	0	=	0
0	$\oplus$	1	=	1	0	$\otimes$	1	=	0
0	$\oplus$	0	=	0	0	$\otimes$	0	=	0

وترتبط قيمة الصدق $T(E)$ لأي قضية E بصورة منطقية بمجموعة الأحداث $E_1, E_2, \ldots$ ويُعبَّر عنها بتابع بول $E = F(E_1, E_2, \ldots)$ للأحداث $E_1, E_2, \ldots$ بالشكل :

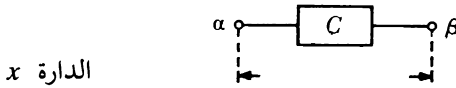
$$T\left[G\left(T[E_1], T[E_2], \ldots \right) \right]$$

حيث G هو الخيال التشاكلي لـ F الذي نحصل عليه عند إبدال $\cap$ و $\cup$ بـ $\otimes$ و $\oplus$ على الترتيب .

244. تطبيق على دارات التشغيل

إن جبور بول ثنائية القيمة المذكورة أعلاه ذات أهمية بالغة في نظرية التشغيل الكهربائي . لنفرض أنه لدينا دارة كهربائية بسيطة X تصل بين المربطين α و β . وتكون الدارة X أما **مفتوحة** (وضع الـ OFF) أو **مغلقة** (وضع الـ ON) .

نأخذ قيمة الصدق $T[E]$ مساوية للصفر للحدث E الذي يقع عندما تكون الدارة X مفتوحة . بينما نأخذ قيمة الصدق $T[E]$ مساوية 1 للحدث E الذي يقع عندما تكون الدارة مغلقة .

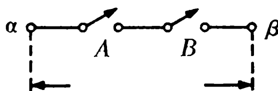


الدارة x

وتبقى الصياغة صحيحية إذا بادلنا كلمة «دارة» بكلمة «مفتاح» .

ويمكن اعتبار الصندوق C على أنه شبكة من الدارات المزوّدة بمِربط عند كل نهاية .

الدارة التسلسلية .

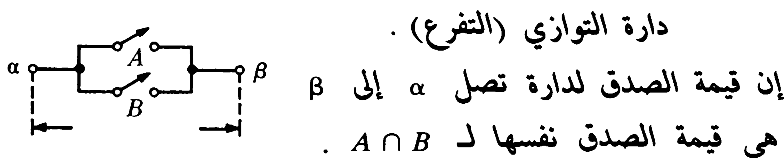


إن قيمة الصدق للدارة الواصلة

بين α و β هي قيمة الصدق لـ $A \cap B$ أي $T[A \cap B] = T[A] \otimes T[B]$. وعندما يكون $T[A \cap B] = 0$ فالدارة مفتوحة ، أما إذا كان $T[A \cap B] = 1$ فالدارة مغلقة .

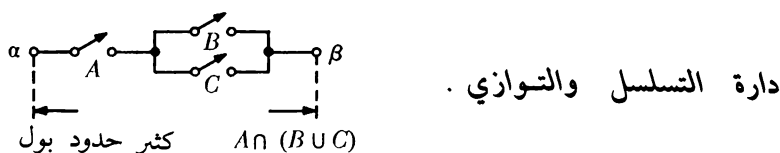
دارة التوازي (التفرع) .

إن قيمة الصدق لدارة تصل α إلى β هي قيمة الصدق نفسها لـ $A \cap B$.



وهكذا فإن $T[A \cup B] = T[A] \oplus [B]$. وتكون الدارة مفتوحة إذا كان $T[A \cup B] = 0$ ومغلقة إذا كان $T[A \cup B] = 1$.

دارة التسلسل والتوازي .



عندما يكون $T[A \cap (B \cup c)] = 0$ فإن الدارة الواصلة بين α و β تكون مفتوحة ،أما إذا كان $T[A \cap (B \cup c)] = 1$ فإن الدارة الواصلة بين α و β تكون مغلقة .

245. الدارة التسلسلية

نأخذ الدارة التسلسلية الموضحة في الشكل الأول من 244 . إن حدث كون المفتاح A مفتوحاً يقابل قيمة صدق $T[A] = 0$ ، أما إذا كان Aمغلقاً فإن

$T[A] = 1$. وكذلك إذا كان B مفتوحاً فإن $T[B] = 0$ أما إذا كان B مغلقاً فإن $T[B] = 1$. عندما يتحقق حدث كون المفتاحان A و B مغلقين تكون الدارة الواصلة بين α و β مغلقة . أماإذا كان A أو B أو كلاهما مفتوحين فإن الدارة الواصلة بين α و β مفتوحة .

بعبارة أخرى إن قيمة الصدق للدارة التسلسلية الواصلة بين α و β هي $T[A \cap B] = T(A) \otimes T(B)$. وعندما يكون $T[A \cap B] = 1$ فإن الدارة التسلسلية مغلقة ، بينما تكون الدارة مفتوحة عندما $T[A \cap B] = 1$.

246. دارة التوازي (التفرع)

تتم المعالجة بصورة مشابهة لما ورد في 245 .

247. الدارات العامة

عند تصميم الدارات الكهربائية كبيرة الحجم ، تتم الاستعانة عادة بتوابع بول (كثيرات حدود بول) لتقرير وضع الدارة (مفتوحة أو مغلقة) حسب جدول الصدق المرتبط بتابع بول .

12. أنظمة العد

248. تمهيد

عندما بدأ الإنسان القديم بعملية العدّ وبدأ يبتدع رموزاً للأعداد فشل في بادىء الأمر في وضع رموز للأعداد الكبيرة ، ثم دعته الحاجة إلى ذلك فاستخدم تكرار الرمز أو استخدام رسوم معينة . حتى حدث الاكتشاف العظيم وهو طريقة المنازل العَشرية ، التي بناها أساساً على تجميع ما يراد عدّه بهيئة حِزم تحتوي كل منها على عشرة ثم تم تجميع عشرة من حزم العشرات لتكون حزم المئات وهكذا . . . . وكان هذا أول نظام عدّ في التاريخ . ولقد أدت فكرة التجميع العشرية إلى استحداث أنظمة عدّ أخرى اعتمدت على التجميع الثماني أو الرباعي . . . .

وقد أخذت فكرة التجميع الثنائي أهمية بالغة في عصر الكهرباء لأنها شكّلت انسجاماً طبيعياً ونادراً مع الحالتين اللتين تكون عليهما الكهرباء (ON-OFF) واشتهر هذا النظام باسم : **النظام الثنائي** .

249. خوارزمية اقليدس

الخوارزمية هي عملية تصميم «دارة رياضية» أي مخطط انسيابي لحل المسائل العلمية وهذا المخطط يعتبر أساساً لكتابة أي برنامج نطلب من الحاسب تنفيذه .

خوارزمية اقليدس هي تلك الطريقة التي يتم فيها إيجاد **القاسم المشترك الأعظم** لعددين m و n بفرض $m > n$.

ويتم ذلك كما يلي :

1. نقسم m على n ونفرض الباقي n_1
2. نقسم n على الباقي n_1 ونفرض الباقي n_2
3. نقسم على n_1 على n_2 ونفرض الباقي n_3

وهكذا . . . . فإذا توصلنا إلى الخطوة التي يكون فيها الباقي صفراً فإن القاسم المشترك الأعظم للعددين هو الباقي في الخطوة السابقة .

ونكتب هذه الخطوات بالشكل التالي : **(1)**

$$\begin{array}{ll} m = q_0 n + n_1 & 0 < n_1 < n \\ n = q_1 n_1 + n_2 & 0 < n_2 < n_1 \\ \cdots & \cdots \\ n_{k-2} = q_{k-1} n_{k-1} + n_k & 0 < n_k < n_{k-1} \\ n_{k-1} = q_k n_k & \end{array} \quad (1)$$

250. كتابة العدد الصحيح الموجب في النظام r

إذا كان m و r صحيحين موجبين وكان $r > 1$ فإنه يمكن كتابة العدد m بدلالة r بشكل وحيد كما يلي : **(2)**

$$m = p_h r^h + p_{h-1} r^{h-1} + \cdots + p_1 r + p_0 \tag{2}$$

حيث $i = 0, 1, \ldots, h$ $\quad 0 \leqq p_i < r$ $\quad p_h \neq 0$

ويمكن كتابة الشكل (2) على الصورة **(3)**

$$m = (p_h p_{h-1} \cdots p_1 p_0)_r \tag{3}$$

نسمي r **أساساً** للنظام وهو يمثل عدد الأرقام المستخدمة للتعبير عن العدد وهي هنا $(r-1)$,... ,$0, 1, 2$.

ونلاحظ من (3) أن قيمة p_0 أو p_1 ، . . . تتغير بحسب موقعها وهكذا **فالمنزلة** هي الموقع الذي يكون فيه أحد الأرقام $0, 1, 2, \ldots, r-1$.

قاعدة أساسية . إذا كان أساس النظام المستخدم هو r وكان الرقم الموجود في إحدى المنازل هو صفر فإننا نستطيع زيادة هذا الرقم حتى $r-1$ ، بعد ذلك نضع في هذه المنزلة صفراً ونضيف 1 إلى المنزلة التالية وهكذا . . . .

مثال . 703, 713, 723, ..., 793, 803

251. كتابة العدد الموجب

يمكن كتابة أي عدد موجب N بشكل وحيد باستخدام الأساس $r > 1$ على النحو التالي :

$$N = p_h r^h + p_{h-1} r^{h-1} + \cdots + p_1 r + p_0 + p_{-1} r^{-1} + \cdots + p_{-m} r^{-m} + \cdots \tag{4}$$

ويمكن كتابة (4) بالشكل

$$N = (p_h p_{h-1} \cdots p_1 p_0 \cdot p_{-1} p_{-2} \cdots p_{-m} \cdots)_r \tag{5}$$

حيث $\quad 0 \leqq p_i < r \qquad p_h \neq 0$

$$i = h, h-1, \ldots, 1, 0, -1, -2, \ldots, -m, \ldots$$

فإذا كان N كسراً عادياً فإن (4) منتهية أو دورية غير منتهية . أما إذا كان N عدداً غير عادي فإن (4) غير دورية ولا منتهية .

إن من أشهر أنظمة العد هي ذات الأساس *2, 3, 8, 10, 12, 16, 20* . ويبين الجدول 12.1 أمثلة لأنظمة عد مختلفة وطريقة كتابة الأعداد فيها ، بينما يبين الجدور 12.2 تعاريف عمليات الجمع والضرب في الأنظمة المختلفة .

252. قواعد التحويل

وهي أساليب الانتقال من تمثيل العدد في نظام إلى تمثيله في نظام آخر :

1. يتم التحويل من الأساس r إلى الأساس *10* (النظام العشري) باستخدام المعادلة (2) .

2. يتم تحويل العدد الصحيح m من النظام العشري إلى النظام ذي الأساس r بتقسيم m على r فيكون الباقي هو أول رقم من اليمين في تمثيل العدد في النظام r ، ثم نقسم حاصل القسمة على r فيكون الباقي هو الرقم الثاني . . وهكذا . . . .

3. يتم تحويل العدد الصحيح m من النظام r إلى النظام s بتحويل العدد m من النظام r إلى العشري ثم من العشري إلى s .

4. يتم تحويل العدد الحقيقي الموجب من النظام r إلى النظام العشري باستخدام المعادلة (4) .

الجدول 12.1 أمثلة على أنظمة العد

	الثنائي	الثلاثي	الثماني	العشري	الاثنا عشري
الأساس	2	3	8	10	12
الأرقام المستخدمة	0, 1	0, 1, 2	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	0, 1, . . . , 8, 9, *t*, *e*
	00000	0000	0000	0000	0000
	00001	0001	0001	0001	0001
	00010	0002	0002	0002	0002
	00011	0010	0003	0003	0003
	00100	0011	0004	0004	0004
	00101	0012	0005	0005	0005
	00110	0020	0006	0006	0006
	00111	0021	0007	0007	0007
	01000	0022	0010	0008	0008
	01001	0100	0011	0009	0009
	01010	0101	0012	0010	000*t*
	01011	0102	0013	0011	000*e*
	01100	0110	0014	0012	0010
	01101	0111	0015	0013	0011
	01110	0112	0016	0014	0012

5. يتم تحويل العدد الحقيقي الموجب من النظام العشري لنظام آخر أساسه r وذلك بتحويل جزئه الصحيح كما ورد في 2 . ولتحويل جزئه الكسري فإننا نضرب الجزء الكسري بـ r ونأخذ الجزء الصحيح من الناتج على أنه أول رقم بعد الفاصلة في النظام r ، بعد ذلك نحذف هذا الجزء الصحيح ونعاود الضرب مرّة أخرى ونأخذ الجزء الصحيح من الناتج على أنه الرقم الثاني بعد الفاصلة في النظام r . . . . وهكذا .

أمثلة .

(a) حوِّل $(1012)_7$ إلى النظام العشري :

$$(1012)_7 = 1(7)^3 + 0(7)^2 + 1(7)^1 + 2(7)^0 = (352)_{10}$$

(b) حوِّل $(18)_{10}$ إلى النظام الثنائي :

$18 \div 2 = 9\,[0],\quad 9 \div 2 = 4\,[1],\quad 4 \div 2 = 2\,[0],\quad 2 \div 2 = 1\,[0],$
$1 \div 2 = 0\,[1]$

إذن

$$(18)_{10} = (10010)_2$$

(c) حوِّل $(21.201)_5$ إلى النظام العشري

$$(21.201)_5 = 2(5)^1 + 1(5)^0 + 2(5)^{-1} + 0(5)^{-2} + 1(5)^{-3} =$$
$$= (11.408)_{10}$$

(d) حوِّل $(0.375)_{10}$ إلى النظام الثنائي .

$2(0.375) = [0] + 0.75\ ,\ 2(0.75) = [1] + 0.5$
$2(0.5) = [1] + 0.0\ ,\ 2(0.0) = [0] + 0.0$

وبالتالي

$$(0.375)_{10} = (0.0110)_2$$

(e) حوّل $(18.375)_{10}$ إلى النظام الثنائي .

نحوّل $(18)_{10}$ لوحدها كما في **(b)** ، ثم نحوّل $(0.375)_{10}$ لوحدها كما في **(d)** وبالتالي

$$(18.375)_{10} = (10010.0110)_2$$

ملاحظة . من الأفضل عند الانتقال من النظام الثنائي إلى العشري ، أن نقوم أولاً بالانتقال إلى الثماني ثم إلى العشري . ويتم ذلك بتقسيم صيغة التمثيل الثنائي للعدد إلى «ثلاثات» بدءً من اليمين ، ثم حساب قيمة كل ثلاثة لوحدها ووضع هذه القيمة بدلاً من الثلاثة منازل الثنائية لتشغل منزلة واحدة في الصيغة الثمانية .

مثال. حوّل $(10011101)_2$ إلى النظام الثماني . نقسم هذه الصيغة إلى ثلاثات فنجد $(10, 011, 101)_2$ ، نحسب الآن قيمة كل ثلاث منازل لوحدها فنجد $(101)_2 = (5)_8$ و $(011)_2 = (3)_8$ و $(10)_2 = (2)_8$ وهكذا نجد

$$(10\ ,\ 011\ ,\ 101)_2 = (235)_8$$

الجدول 12.2 عينات من جداول الجمع والضرب

الجمع الثلاثي

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

الجمع الثنائي

+	0	1
0	0	1
1	1	10

الضرب الثلاثي

×	0	1	2	10
0	0	0	0	0
1	0	1	2	10
2	0	2	11	20
10	0	10	20	100

الضرب الثنائي

×	0	1	10
0	0	0	0
1	0	1	10
10	0	10	100

253. الطرح بواسطة المتممات

تقوم بعض الحاسبات بعملية الطرح بواسطة إتمام المطروح إلى المطروح منه .

وذلك كما يفعل الكثير من البائعين من إجل إعادة الباقي للزبائن. فإذا كان k عدداً مؤلفاً من n رقماً في النظام العشري فإن **المتمم للعشرات** هو $10^n - k$. أما **المتمم للتسعات** فهو $(10^n - k) - 1$.

إذا كان b عدداً مؤلفاً من n رقماً في النظام الثنائي فإن **المتمم للاثنينات** هو $2^n - b$. أما **المتمم للواحدات** فهو $2^n - b - 1$.

الجدول 12.3 أمثلة توضح المتممات

متمم التسعات	متمم العشرات	العدد $(k)_{10}$
978	979	021
9978	9979	0021
94444	94445	05555

متمم الواحدات	متمم الاثنينات	العدد $(b)_2$
0	1	1
011	100	100
010	011	101
1010	1011	0101
01001	01010	10110

ملاحظات حول الجدول

(a) لإيجاد متمم التسعات للعدد k نطرح كل رقم من أرقامه من 9 .

(b) لإيجاد متمم العشرات نوجد متمم التسعات ثم نضيف له 1 .

(c) لإيجاد متمم الواحدات للعدد $(b)_2$ فإننا نضع في هذا العدد 1 بدلاً من 0 و 0 بدلاً من 1 .

(d) لإيجاد متمم الاثنينات ، نوجد متمم الواحدات ونضيف له 1 .

254. قاعدة الطرح باستخدام متمم العشرات (الاثنينات)

نضيف إلى المطروح منه متمم عشرات (اثنينات) المطروح . فإذا كان في ناتج الإضافة (الجمع) عمود إضافي يحوي الرقم 1 فإننا نحذف هذا الرقم ونضع بدلاً منه إشارة + أما إذا كان ناتج الإضافة لا يحتوي هذا العمود فإننا نضع إشارة - ويكون المحصول عليه هو الجواب .

255. قاعدة الطرح باستخدام متمم التسعات (الواحدات)

نجمع متمم تسعات (واحدات) المطروح إلى المطروح منه ، فإذا كان في ناتج الإضافة عمود إضافي يحوي الرقم 1 فإننا نضيف هذا الواحد إلى عمود الآحاد ونضع إشارة + بدلاً عنه . أما إذا لم يكن العمود الإضافي موجوداً فإننا نأخذ متمم التسعات لناتج الإضافة ثم نضع إشارة - ونحصل بذلك على الجواب .

أمثلة .

(a) إطرح $(076)_{10}$ من $(324)_{10}$. إن متمم التسعات لـ 076 هو 923 . نضيف إلى المطروح منه $923 + 324 = 1247$ نضع + بدلاً من العمود الإضافي 1 إلى الآحاد فنحصل على الجواب 248 .

(b) إطرح $(324)_{10}$ من $(076)_{10}$. إن متمم التسعات لـ 324 هو 675 . نضيف إلى المطروح منه $675 + 076 = 751$. وبما أنه لا يوجد عمود إضافي ، نأخذ متمم التسعات لهذا الجواب فنجد 248 ونضع إشارة - فيكون الجواب 248 - .

(c) إطرح $(01110001)_2$ من $(11001101)_2$. إن متمم الواحدات لـ 01110001 هـو 10001110 . نـضـيـف إلى المـطروح مـنـه $10001110 + 11001101 = 101011011$ ونلاحظ أنه يوجد عمود إضافي ولذا فالجواب هو

$$+ (01011011)_2 + 1 = (01011100)_2$$

(d) إطرح $(11001101)_2$ من $(01110001)_2$. إن متمم الواحدات لـ 11001101 هو 00110010 .

نجمع إلى المطروح منه فنجد

$$(00110010 + 01110001 = 10100011)_2$$

وهنا لا يوجد عمود إضافي ، نأخذ متمم الواحدات ونرفق إشارة - فيكون الجواب $-(01011100)_2$.

256. حساب الفاصلة الثابتة والفاصلة العائمة

عند كتابة أي عدد حقيقي فإنه يتم استخدام الفاصلة الثابتة لتفصل بين الجزء الصحيح للعدد والجزء الكسري منه . وتتم كتابة العدد B باستخدام الفاصلة العائمة بالشكل $B = a \times 10^m$ حيث $0 \leqslant a < 1$ و m عدد صحيح . أو بالشكل $B = a \times 2^m$. كما سنوضح في الجدول التالي :

الفاصلة العائمة	الفاصلة الثابتة		النظام
30,784 + 7	0.30784×10^7	3,078,400.0	عَشري
34,123 − 2	0.34123×10^{-2}	0.0034123	
10,101 + 8	0.10101×2^8	10101000.0	ثنائي
10,101 − 3	0.10101×2^{-3}	0.00010101	

257. التطابقات

ليكن a , b عددين صحيحين . فإذا كان الفرق بينهما يقبل القسمة على m فإن a , b **متطابقان بمقياس** m ونكتب

$$a \equiv b \bmod m \qquad \text{أو} \qquad a = b \ (m)$$

ونسمى كلاً من a و b **راسباً** للآخر ، بينما نسمي m **المقياس** .

نظرية . إذا كان

$$\alpha \equiv \beta \bmod m , \qquad d \equiv \bmod m , \qquad a \equiv b \bmod m ,$$

وكان c و n أي عددين صحيحين ، $n > 0$ و $f(x)$ كثير حدود في x ذو أمثال صحيحة فإن

$$a \pm \alpha \equiv (b \pm \beta) \bmod m \qquad a \equiv d \bmod m$$

$$a\alpha \equiv b\beta \bmod m \qquad ca \equiv cb \bmod m$$

$$f(a) \equiv f(b) \bmod m \qquad a^n \equiv b^n \bmod m$$

13. المصفوفات

258. تعاريف

المصفوفة هي كائن رياضي يتم بناؤه بترتيب $m \times n$ من الأعداد (الحقيقية أو العقدية) وفق m **سطراً** و n **عموداً** .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ونرمز للمصفوفة بحرف لاتيني كبير A أو بأحد الرموز التالية : $\| a_{ij} \|$, (a_{ij}), $[a_{ij}]$ حيث تعني a_{ij} العنصر الواقع في السطر i و العمود j .

مرتبة المصفوفة هو الزوج المرتب (m,n) الذي نكتبه أيضاً $m \times n$.

259. أنواع المصفوفات

المصفوفة المربعة إذا كان $m \neq n$ تسمى المصفوفة مستطيلة ، أما إذا كان $m = n$ فالمصفوفة مربعة . ويكون **القطر الرئيسي** لها هو مجموعة العناصر $a_{11}, a_{22},\ldots,a_{nn}$. أما **القطر الثانوي** فهو مجموعة العناصر $a_{1n}, a_{2n-1},\ldots,a_{n1}$.

المصفوفة العمودية (ذات العمود الواحد) أو **متجه العمود** هي مصفوفة من المرتبة $m \times 1$ ونرمز لها بـ $X = \{ x \}$ أو $x_i \uparrow$.

المصفوفة السطرية (ذات السطر الواحد) أو متجه السطر هي مصفوفة من المرتبة $1 \times n$ ونرمز لها بـ $U = u_i$ أو $[u_i]$ أو $\overline{u_i}$ أو $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$.

المصفوفة الصفرية هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار ونرمز لها بـ $\mathbf{0}$

المصفوفة الواحدية (المحايدة) هي مصفوفة مربعة $I = [a_{ij}]$ بحيث $a_{ii}=1$ من أجل جميع قيم i بينما تكون جميع العناصر الأخرى مساوية للصفر . أي هي تلك التي تكون عناصرها $a_{ij} = \delta_{ij}$ حيث δ_{ij} هو **رمز كرونكر** الذي يحقق ما يلي ؛ $\delta_{ij} = 1$ إذا كان $i = j$ و $\delta_{ij} = 0$ إذا كان $i \neq j$ ونرمز للمصفوفة الواحدية من المرتبة n وبالرمز I_n وهكذا فإن

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

المصفوفة القطرية هي مصفوفة تكون فيها جميع العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي وتحته مساوية للصفر ونرمز لها بـ $diag (a_1, a_2, ..., a_n)$.

المصفوفة السُّلَّمِيّة هي مصفوفة قطرية تكون فيها جميع عناصر القطر الرئيسي متساوية وتساوي λ ونكتبها بالشكل λI .

المصفوفة المثلثية هي مصفوفة تكون فيها جميع العناصر الواقعة فوق **أو** تحت عناصر القطر الرئيسي مساوية للصفر ونسميها مصفوفة مثلثية **عليا أو** مصفوفة مثلثية **سفلى** .

260. العمليات على المصفوفات

نعرّف أولاً **علاقة التساوي** . **لتكن** $B = [b_{ij}]$ و $A = [a_{ij}]$ مصفوفتين من نفس المرتبة $m \times n$. نقول إن A و B **متساويتان** ونكتب $A = B$ إذا وفقط إذا كانت العناصر المتقابلة متساوية (أي التي لها المواقع نفسها) ونعبّر عن ذلك بالرموز على النحو التالي :

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \; (i = 1, \; \ldots, \; n \; ; \; j = 1, \; \ldots, \; m)$$

الجمع . إن مجموع A و B هو مصفوفة $C = A + B$ حيث

$$C \equiv [c_{ij}] \; , \; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

يتم تعريف الطرح بصورة مشابهة .

الضرب . لتكن A مصفوفة من المرتبة $m \times n$ و B مصفوفة من المرتبة $n \times p$ فإن جداء المصفوفتين A و B هو مصفوفة $D = A B$ معرّفة بالشكل

$$D \equiv [\mathrm{d_{ij}}] \; , \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \, b_{kj}$$

الضرب بعدد . إن حاصل ضرب المصفوفة A بعدد λ هو المصفوفة الناتجة عن ضرب **كل** عنصر من عناصر المصفوفة بذلك العدد ، ونكتب :

$$\lambda \, A \equiv \lambda \, [\, a_{ij} \,] \; = \; [\, (\, \lambda \, a_{ij} \,) \,] \; = \; A \, \lambda$$

261. المعين (المحددة)

هو عدد $d \, (A)$ نقابل به المصفوفة المربعة A ونرمز له بـ $det \, A$ أو $| \, A \, |$ ، ونعرّفه بالعلاقة

$$d(A) = \Sigma(-1)^h a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

حيث نأخذ الجمع على التباديل $i_1, i_2, \ldots, i_n$ للأعداد $1, 2, \ldots, n$ أما h فهو عدد مرات تغيير كل عنصرين متجاورين في التبديل للوصول إلى الترتيب الطبيعي . انظر 17 .

262. رتبة المصفوفة

لتكن $A^{r_1 \ldots r_k}_{s_1 \ldots s_k}$ مصفوفة **الصغير** المربعة التي نحصل عليها باختيار العناصر الواقعة في الأسطر $r_1, \ldots, r_k$ والأعمدة $s_1, \ldots, s_k$ من المصفوفة A وابقائها بالترتيب نفسه . فإذا كانت أرقام الأسطر والأعمدة المنتقاة هي نفسها فمصفوفة الصغير تسمى **مصفوفة الصغير الرئيسية** . إن أول مصفوفة صغير هي المصفوفة A ذاتها ، فإذا حذفنا منها سطراً وعموداً حصلنا على مصفوفات الصغار من المرتبة $n - 1$ وعددها n^2 . . وهكذا . فإذا حسبنا معينات مصفوفات الصغار بدءاً من المصفوفة A ذاتها وإذا فرضنا أن ρ مرتبة أول معين مغاير للصفر . قلنا إن ρ هي رتبة المصفوفة A . وهكذا إذا كان $d(A) \neq 0$ فإن رتبة المصفوفة تساوي مرتبتها . أما إذا كان $d(A) = 0$ فإن رتبة المصفوفة أقل من n . وتسمى المصفوفة عندئذٍ **مصفوفة شاذة** (منفردة) .

نظرية . إن رتبة الجداء AB لا تتجاوز رتبة A أو B ، وإذا كانت B و C غير شاذتين فإن للمصفوفات A, AB, CA الرتبة نفسها .

263. مفكوك لابلاس

هو طريقة لإيجاد قيمة $d(A)$ على النحو التالي : لتكن $r_1, r_2, \ldots, r_k$ أسطراً مختلفة من مصفوفة مربعة A فإن

$$d(A) = \Sigma(-1)^h \, d\left(A\begin{matrix} r_1 & \cdots & r_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{matrix}\right) d\left(A\begin{matrix} r_{k+1} & \cdots & r_n \\ i_{k+1} & \cdots & i_n \end{matrix}\right)$$

حيث h هي عدد مرات تغيير كل عنصرين متجاورين من $i_1, i_2, \ldots, i_n$ للوصول إلى $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ، كما نأخذ الجمع على $n!/[k!(n-k)!]$ من الطرق الممكنة لاختيار $i_1, i_2, \ldots, i_k$ من الأعداد $1, 2, \ldots, n$.

المتمم الجبري a_{rs} هنا يعرّف بالعلاقة

$$A_{rs} = (-1)^{r+s} \, d\left(A\begin{matrix} 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n \\ 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n \end{matrix}\right)$$

نظرية .

$$d(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{is}A_{is} \qquad d(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ri}A_{ri}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{is}A_{ip} = 0 \text{ if } s \neq p \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ri}A_{pi} = 0 \text{ if } r \neq p$$

264. مصفوفات خاصة

منقول مصفوفة A هو مصفوفة A^T تنتج عن A بمبادلة الأسطر بالأعمدة والأعمدة بالأسطر ، أي إذا كان $A = [a_{ij}]$ فإن $A^T = [a_{ji}]$.

قرَين مصفوفة $A = [a_{rs}]$ هو المصفوفة

$$\text{adj } A = [A_{sr}] = [A_{rs}]^T$$

حيث A_{rs} هو المتمم الجبري لـ a_{rs} في A .

المصفوفة المعاكسة A^{-1} أو مقلوب مصفوفة A هي مصفوفة وحيدة نعرفها بالعلاقة $A^{-1}A = I$. وتكون المصفوفة المعاكسة موجودة إذا كان

$d(A) \neq 0$ وينتج من ذلك أن $A A^{-1} = I$. وتُعطى المصفوفة المعاكسة بالعلاقة

$$A^{-1} = \frac{1}{d(A)} \, adj \; A$$

المصفوفة المتناظرة هي مصفوفة تحقق $a_{ij} = a_{ji}$ من أجل جميع i و j أو $A^T = A$.

المصفوفة المتناظرة تخالفياً هي مصفوفة تحقق الشرط $A^T = - A$ أي $a_{ij} = - a_{ji}$ و $a_{ii} = 0$.

المصفوفة المرافقة العقدية لمصفوفة A هي المصفوفة $\overline{A} = [\, \overline{a_{ij}} \,]$ حيث $\overline{a_{ij}}$ هو المرافق العقدي للعدد a_{ij} .

المصفوفة الهرميتية هي مصفوفة A بحيث $\overline{A}^T = A$.

المصفوفة الهرميتية التخالفية هي مصفوفة A بحيث $\overline{A}^T = - A$.

المصفوفة المتعامدة هي مصفوفة A بحيث $A^T A = I$.

المصفوفة الوَحْدية هي مصفوفة A بحيث $\overline{A}^T A = I$.

265. خواص المصفوفات

تحقق المصفوفات كثيراً من قوانين الجدول 11.2 الفصل 11 . نورد هنا بعضاً من الخواص الهامة .

نبرز أولاً أن **ضرب المصفوفات عموماً ليس تبديلياً** .

$$A + B = B + A \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$
$$(AB)C = A(BC)$$
$$A(B + C) = AB + AC \qquad (B + C)A = BA + CA$$
$$A - B = A + (-1)B = A + (-I)B$$
$$AA^{-1} = I \qquad A^{-1}A = I$$
$$d(AB) = d(A)\, d(B) \qquad d(A^{-1}) = \frac{1}{d(A)}$$
$$d(AA^{-1}) = d(A)\, d(A^{-1}) = d(I) = 1$$
$$(A^T)^T = A \qquad (A^{-1})^{-1} = A$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T \qquad (AB)^T = B^T A^T$$
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad adj(AB) = adj\, B\, adj\, A$$

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n فإن

$$d(adj\, A) = (d(A))^{n-1}$$

إذا كان β , α سُلّميين فإن

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \qquad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$
$$\alpha(\beta A) = \alpha\beta A \qquad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

266. المصفوفات البسيطة

العملية البسيطة على أسطر أو أعمدة المصفوفة هي تحويل يأخذ أحد الأشكال التالية :

1. المبادلة بين سطرين أو عمودين .
2. جمع عناصر سطر أو عمود للعناصر المقابلة لسطر أو عمود آخر بعد ضربها بعدد h .
3. ضرب عناصر سطر أو عمود بعدد k. $(k \neq 0)$.

المصفوفة البسيطة هي المصفوفة التي نحصل عليها من المصفوفة الواحدية I بعد إجراء إحدى العمليات البسيطة عليها .

وهكذا لدينا **ثلاث مصفوفات بسيطة** $I_{(ij)}, H_{(ij)}, J_{(ij)},$

$I_{(ij)}$ هي المصفوفة التي نحصل عليها بمبادلة السطرين i و j في المصفوفة الواحدية دون المساس بالأسطر الأخرى . إن ضرب المصفوفة A من اليسار (اليمين) بالمصفوفة $I_{(ij)}$ يبادل بين السطرين (العمودين) i و j لهذه المصفوفة .

$(i \neq j)$ $H_{(ij)} = I + (h)_{:ij)}$ هي المصفوفة البسيطة الثانية التي نحصل عليها بادخال العنصر h في السطر i والعمود j ، وتقوم المصفوفة عند ضربها من اليسار (اليمين) بالمصفوفة A بجمع عناصر السطر i (العمود i) مضروبة بالعدد h إلى السطر j (العمود j) .

أما المصفوفة $J_{(ii)}$ فهي $J_{(ii)} = I + (k)_{ii}$ التي نحصل عليها بعد إبدال العنصر 1 الواقع في السطر i والعمود i بالعدد k .

وضرب المصفوفة A من اليسار (اليمين) يؤدي إلى ضرب عناصر السطر i (العمود i) بالعدد k .

نظرية . إذا حصلنا على D من A بانجاز عدد منته من العمليات البسيطة على أعمدة وأسطر A فإن $D = R\,A\,S$ حيث R و S هما جداءات المصفوفات البسيطة .

267. الارتباط الخطي (التابعية الخطية)

نقول بأن العناصر $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (التي قد تكون مصفوفات ، أسطر مصفوفة ، أعمدة مصفوفة ، كثيرات حدود ، أعداد ، حلول لجُمل معادلات . . .)

مستقلة خطياً بالنسبة للحقل F إذا كان تَحقُّق العلاقة

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n = 0$$

لا يتم إلا إذا كانت $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. أما إذا أمكن إيجاد مجموعة من الأعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ليست جميعها أصفاراً وتنتمي إلى F بحيث تتحقق العلاقة السابقة ، قلنا إن $z_1, z_2, \ldots, z_n$ مرتبطة خطياً .

268. مجموعة المعادلات الجبرية

لتكن لدينا مجموعة المعادلات

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = y_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = y_m \end{cases}$$

التي يمكن كتابتها بالشكل المختصر

$$A\{x\} = \{y\} \qquad (r = 1, \ldots, m) \qquad \sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_s = y_r \quad (1)$$

حيث المصفوفة A هي $A = [a_{rs}]$ و a_{rs} من الحقل F .

نعرّف **المصفوفة الموسّعة** B بأنها المصفوفة التي تنتج عن A بإلحاق العمود $\{y\}$ بها ونكتب $B = A \mid \{y\}$. بفرض ρ رتبة A و ρ' رتبة B .

نظرية (a) إذا كان $\rho < \rho'$ فإنه لا يوجد لمجموعة المعادلات (1) حل مشترك ونقول إن (1) **غير متّسقة** .

(b) إذا كان $\rho ' = \rho$ فإنه يمكن تحويل مجموعة المعادلات الأصلية إلى مجموعة من ρ معادلة تعيّن وبشكل وحيد ρ من المجاهيل بدلالة $n - \rho$ من المجاهيل الباقية . وتحقق العبارات التي تعطي هذه المجاهيل التي عددها ρ ، تحقق بقية المعادلات التي عددها $m - \rho$. وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $\rho ' = \rho = m = n$ فإنه يوجد حل عددي وحيد .

مجموعة المعادلات المتجانسة هي مجموعة المعادلات التي يكون فيها $\{ y \} = \{ 0 \}$ وتأخذ الشكل $A \{ x \} = \{ 0 \}$ أي

$$(2) \qquad \sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_s = 0 \qquad (r = 1, \ldots, m)$$

نظرية (a) يوجد للمجموعة (2) مجموعة حلول مستقلة خطياً عددها $n - \rho$ وكل حل آخر مرتبط خطياً مع هذه الحلول .

ذلك يعني أنه يمكن انتقاء ρ معادلة من (2) تعين وبشكل وحيد ρ مجهولاً بدلالة المجاهيل الأخرى الباقية التي عددها $n - \rho$. وبشكل تتحقق فيه المعادلات الباقية من أجل عبارات المجاهيل التي حصلنا عليها .

(b) يوجد للمجموعة (2) حلول ليست جميعها أصفاراً إذا وفقط إذا كان $\rho < n$. أما إذا كان $\rho = n$ فإن الحل الوحيد للمعادلات (2) هو $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

(c)إذا كان عدد المعادلات في (2) مساوياً n وعدد المجاهيل n فإن لها حلولاً ليست جميعها أصفاراً إذا وفقط إذا كان $d (A) = 0$ ، أما إذا كان $d (A) \neq 0$ فالحل الوحيد هو $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

ملاحظة . يمكن تسهيل إيجاد حلول $A \{ x \} = \{ y \}$ بانجاز سلسلة من العمليات البسيطة على أسطر A التي تحوّل A إلى مصفوفة مثلثية أو مصفوفة قطرية .

إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإنه يمكن تحويلها إلى المصفوفة الواحدية I بسلسلة من العمليات البسيطة . فإذا قمنا باجراء نفس العمليات البسيطة هذه على I نحصل على المصفوفة المعاكسة A^{-1} . وبعبارة أخرى إذا رمزنا للمصفوفات البسيطة الموافقة للعمليات البسيطة بالرموز $E_1, E_2, \ldots, E_k$ وأنجزنا هذه العمليات بدءاً من E_1 وفرضنا أن $E = E_k \ldots E_2 . E_1$ فإن $EA = I$ الأمر الذي يعني أن $E = A^{-1}$. ويُعطى الحل بالعلاقة

$$\{ x \} = A^{-1} \{ y \} = E \{ y \}$$

انظر 275 حتى 282 .

269. التكافؤ

نقول إن المصفوفة المربعة A **مكافئة** للمصفوفة المربعة B إذا كان يوجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث $A = P B Q$.

نظرية . إذا كانت ρ رتبة المصفوفة A فإنها تكافىء المصفوفة القطرية $diag (h_1, h_2, \ldots, h_\rho, 0, \ldots, 0)$ حيث $h_i \neq 0$.

نظرية . إذا كان يوجد مصفوفة P غير شاذة بحيث $A = P^T B P$ فإن A مكافئة لـ B .

نظرية . إذا كانت ρ رتبة مصفوفة متناظرة A فإن A تكافىء المصفوفة القطرية

$$diag\ (d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_p,\ 0,\ \ldots,\ 0)\ ;\ d_i \neq 0$$

التشابه . نقول إن المصفوفة A مشابهة للمصفوفة B إذا كان يوجد مصفوفة P غير شاذة بحيث $A = P^{-1} B P$.

270. الأشكال ثنائية الخطية

الشكل ثنائي الخطية هو تابع معرّف بالعلاقة

$$G \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j$$

التي يمكن أن تكتب بأحد الأشكال التالية :

$G = \{x\}^T A \{y\}$ أو $G = Y^T A X$ أو $G = < AX, Y >$

حيث Y^T و$\{x\}^T$ متجه المتغيرات السطري ، بينما X و $\{y\}$ هو متجه المتغيرات العمودي . ويمكن التحقق من صحة العلاقات التالية التي سمّي G بسببها شكلاً ثنائي الخطية :

$$< A(X + Z), Y > = < AX, Y > + < AZ, Y >$$

$$< A(\alpha X), Y > = \alpha < AX, Y >$$

$$< AX, Y > = < X, A^T Y >$$

$$< AX, Y > = < Y, AX >$$

وذلك من أجل أي متجه Z, Y, X و$\alpha \in R$.

انظر 289 .

إذا أجرينا التحويلين $X = P\xi\ ,\ Y = Q\eta$

حيث P و Q مصفوفتان غير شاذتين و ξ و η متجهان .

$$G = \xi^T P^T A Q \eta$$

وتكون المصفوفة $P^T A Q$ مكافئة للمصفوفة A .

271. الأشكال التربيعية

الشكل التربيعي هو تابع Q للمتغيرات $x_1, \ldots, x_n$ معرّف من أجل المصفوفة المتناظرة A كما يلي :

$$Q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad Q = X^T A X \ , \ a_{ij} = a_{ji}$$

فإذا أجرينا التحويل غير الشاذ (أي مصفوفة التحويل C غير شاذة) $X = CY$ فإن Q تصبح

$$Q = Y^T C^T A C Y$$

ونقول إن $B = C^T A C$ مطابقة للمصفوفة A .

272. التحويل من جملة احداثية لأخرى

بفرض أن المتجهين X و Y منسوبان للجملتين الاحداثيتين S و S' على الترتيب ، ومرتبطان بالعلاقة

$$X = A Y \ , \ A = [\, a_{rs} \,]$$

إذا أجرينا انتقالاً من الجملة S إلى $\overline{S}$ ومن S' إلى $\overline{S}'$ وفق تحويلين غير شاذين P و Q فإن X ينتقل إلى $\overline{X}$ و Y ينتقل إلى $\overline{Y}$ على النحو التالي

$$X = P \overline{X} \ , \qquad Y = Q \overline{Y}$$

وبالتالي فإن

$$\overline{X} = P^{-1} A Q \overline{Y}$$

وتكون $B = P^{-1} A Q$ مكافئة للمصفوفة A .

273. المصفوفات من λ

المصفوفة من λ هي مصفوفة A عناصرها كثيرات حدود في λ . وتكون **رتبة المصفوفة من** λ هي ρ إذا كان ρ هو مرتبة أكبر معين مغاير للصفر يمكن الحصول عليه من A . (أكبر معين هنا تعني المعين الذي مرتبته أكبر ما يمكن) . **العمليات البسيطة من** λ هي العمليات 3, 2, 1 نفسها المعرفة في 266 ، حيث يمكن أن تكون h ثابتة أو كثير حدود في λ .

تكون المصفوفتان من λ متكافئتين إذا أمكن الوصول من إحداهما للأخرى بسلسلة منتهية من العمليات البسيطة .

نظرية . كل مصفوفة من λ ، A من المرتبة n والرتبة ρ تكافىء مصفوفة قطرية من λ هي $diag\ (E_1, E_2, \ldots, E_\rho, 0, \ldots, 0)$ حيث E_i واحد أو كثير حدود في λ أمثال أكبر درجة فيه تساوي 1 . كما أن كل E_{i-1} هو عامل لـ E_i من أجل $i = 1, 2, \ldots, \rho$.

نسمى $E_1, E_2, \ldots, E_\rho$ **عوامل** A **اللامتغيرة** .

إذا كانت $E_1, E_2, \ldots$ كثيرات حدود عقدية فإن كل E_i يكتب بالشكل

$$E_i = (\lambda - \alpha)^{a_i}(\lambda - \beta)^{b_i} \ldots (\lambda - \kappa)^{k_i}$$

حيث

$$a_i < a_{i+1},\ b_i < b_{i+1},\ \ldots,\ k_i < k_{i+1}\ \ (i = 1, 2, \ldots, \rho - 1)$$

القواسم البسيطة للمصفوفة A هي العوامل
$(\lambda - \alpha)^{a1}, \ldots, (\lambda - k)^{k\rho}$ المغايرة للواحد .

من أهم المصفوفات من λ هي المصفوفة $A - \lambda I$ التي سترد في 274
والتي يمكن أن نطبق عليها كل ما ورد في هذه الفقرة .

نظرية . إن كلاً من **(a)** و **(b)** أدناه هو شرط لازم وكافي لتكون المصفوفتان من λ ، A و B متكافئتين من λ :

(a) يوجد للمصفوفتين A و B العوامل اللامتغيرة نفسها .
(b) يوجد مصفوفتان من λ هما P و Q بحيث $d(P)\,d(Q) \neq 0$
وبحيث $Q\,A\,P = B$

274. المتجهات الذاتية والقيم الذاتية

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n وليكن X متجهاً من n ، إن AX عموماً هو متجهه $Y \neq X$ فإذا كان المتجه X يحقق العلاقة $AX = \lambda X$ فإننا نسميه «**المتجه الذاتي** للمصفوفة A » ونسمي λ **القيمة الذاتية** الموافقة .
ويتم البحث عادة عن مثل هذه المتجهات من العلاقة

$$A\,X = \lambda\,X \quad \text{أو} \quad (A - \lambda I)\,X = 0$$

حيث I المصفوفة الواحدية من المرتبة n . ولكي يكون لهذه المعادلة حلولاً مغايرة للصفر فإنه يجب أن تتحقق المعادلة

$$det\ (A - \lambda I) = 0$$

التي تعطي بعد فك المعين معادلة كثير حدود من الدرجة n في λ جذورها $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ تسمى القيم الذاتية . وتسمى هذه المعادلة **كثير الحدود المميز** ،

أو **المعادلة المميزة** .

ويوجد مقابل كل قيمة ذاتية λ_i **متجه ذاتي** X_i نحصل عليه من حل جملة المعادلات

$$(A - \lambda_i I) X = 0$$

كما أن مركبات المتجه X_i هي المتممات الجبرية لسطر مناسب من $A - \lambda_i I$.

إذا كانت القيم الذاتية مختلفة فإن المتجهات الذاتية الموافقة مستقلة خطياً . ويمكن استخدام هذه المتجهات كأساس لفضاء متجهات من n .

لتكن L مصفوفة المتجهات الذاتية التي أعمدتها هي المتجهات الذاتية المستقلة خطياً أي $L = (X_1, \ldots, X_n)$ فإن

$$L^{-1} A L = diag\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

نظرية . إذا كانت A مصفوفة حقيقية متناظرة فإن القيم الذاتية هي أعداد حقيقية . فإذا كانت هذه الجذور مختلفة فإن المتجهات الذاتية الموافقة متعامدة . أي أن $X_i^T . X_j = 0$

نظرية . إذا كانت المصفوفة متناظرة تخالفياً فإن جذور المعادلة المميزة (جميع القيم الذاتية) تخيلية بحتة (من الشكل $a\, i$) أو صفرية .

نظرية . إذا كانت λ جذراً مضاعفاً r مرة للمعادلة المميزة : $det (A - \lambda I) = 0$ فقد يوجد مقابل هذا الجذر r من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً وقد يوجد $p < r$ من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً ويتم إيجاد مجموعة من $r - p = m$ متجهاً (ليس ذاتياً) تكون مستقلة خطياً من العلاقات

$$(A - \lambda I) X_1 = 0, \qquad (A - \lambda I) X_2 = X_1, \ldots,$$

$$(A - \lambda I) X_m = X_{m-1}$$

نظرية . إذا كانت A مصفوفة مربعة معادلتها المميزة

$$\det (A - \lambda I) \equiv \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_n$$

فإن

$$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \ldots + \alpha_n I = 0$$

وتسمى هذه النظرية باسم **كايلي - هاميلتون** .

نظرية . لتكن A مصفوفة مربعة من $n \times n$ وليكن

$$T_1 = Tr(A), \; T_2 = Tr(A^2), \; \ldots, \; T_n = Tr(A^n)$$

حيث $Tr(A) =$ مجموع عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة A ،

وهكذا . . . عندئذٍ تُعطى أمثال المعادلة المميزة بالعلاقات

$$\alpha_1 = - T_1$$

$$\alpha_2 = - \frac{1}{2} (\alpha_1 T_1 + T_2)$$

$$\alpha_3 = - \frac{1}{3} (\alpha_2 T_1 + \alpha_1 T_2 + T_3)$$

$$\alpha_n = - \frac{1}{n} (\alpha_{n-1} T_1 + \ldots + T_n)$$

14. الجبر الخطي

حل جُمل (مجموعات) المعادلات الخطية

275. جُملة المعادلات الخطية

هي مجموعة المعادلات الخطية

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n$$

التي عددها n وتحوي n مجهولاً وتكتب اختصاراً بالشكل

(1) $$\sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_s = b_r \qquad r = 1, \ldots, n$$

أو بالشكل

(2) $$A \{ x \} = \{ b \}$$

حيث $A = (a_{rs})$ هي ما نسميه **مصفوفة الأمثال** للجملة (1) ، $\{x\}$ هو **المتجه المجهول** المكون من n مجهولاً ، $\{b\}$ **المتجه الحر** . انظر 268 .

276. قاعدة كرامر

إذا كان $d(A) \equiv D \neq 0$ وكان D_r هو معين المصفوفة التي نحصل عليها من A بإبدال العمود r من المصفوفة A بالعمود $\{b\}$ ، فإن حل المعادلة (1) يُعطى بالعلاقة

$$x_r = \frac{D_r}{D} \qquad r = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

277. طريقة الحذف لِغوَص

نحوّل في هذه الطريقة المصفوفة A إلى مصفوفة مثلثية علوية مكافئة لـ A (أي $r > s$ و $a_{rs} = 0$) وذلك بحذف (بتصفير) جميع العناصر الواقعة تحت العنصر a_{11} ثم بحذف جميع العناصر الواقعة تحت a_{22} ، . . . وهكذا كما في المخطط التالي :

1. نكتب المصفوفة A والعمود b على النحو التالي

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

2. نفرض أن $a_{11} \neq 0$ (إذا كان $a_{11} = 0$ نبادل السطر الأول مع أي سطر آخر عنصره الأول مغاير للصفر) . ونسمي a_{11} **المُرتَكَز** .

3. نجمع عناصر السطر الأول بعد ضربها بـ $- a_{21} / a_{11}$ إلى السطر الثاني بهدف جعل أول عنصر تحت a_{11} مساوياً للصفر .

4. نكرر الخطوة 3 بضرب عناصر السطر الأول بـ $- a_{31} / a_{11}$ و . . . و $- a_{n1} / a_{11}$ على التوالي وجمعها للسطر الثالث و . . . والسطر النوني (الذي رقمه n) .

فنحصل على المصفوفة

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a^{(1)}_{22} & \dots & a^{(1)}_{2n} & b^{(1)}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & a^{(1)}_{n2} & \dots & a^{(1)}_{nn} & b^{(1)}_n \end{array}\right)$$

5. نكرر الخطوات 2 و 3 و 4 على المصفوفة الناتجة من المصفوفة السابقة بحذف السطر والعمود اللذين يحويان a_{11} ، وهكذا . . ، فنحصل على مصفوفة مثلثية عليا .

6. نكتب جملة المعادلات المكافئة الجديدة بالشكل (7)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \dots \\ b_n^{(n-1)} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

7. نحسب الحل بطريقة التعويض التراجعي لنحصل على **(8)**

$$(8) \quad \begin{cases} x_n = \dfrac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \\ x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)} x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}} \end{cases}$$

ونسمي $a_{11}, a^{(1)}_{22}, a^{(1)}_{33}, \ldots$ المرتكزات .

ملاحظة . يمكن في الواقع تحويل A إلى قطرية باتمام حذف غوص مطبقاً على المصفوفة المثلثية الناتجة ، وذلك بتصفير العناصر الواقعة فوق $a^{(n-1)}_{nn}$ . . . وهكذا . وعندئذٍ يتم إيجاد الحل بسهولة .

278 a. طرائق التكرير (التقريب المتتالي)

يتم حل جملة المعادلات

$$A\,X = b$$

حيث X متجه المجاهيل ، b متجه معلوم ، وذلك بكتابة هذه الجملة بالصيغة التكريرية التالية

$$X_{r+1} = B\,X_r + c$$

حيث يتم البدء باختيار حل تقريبي X_0 نسميه التقريب الصفري لمتجه الحل X ، ونحصل من العلاقة السابقة على متتالية من المتجهات $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ ونطمح أن تتقارب هذه المتتالية من المتجه الحل X . أما المصفوفة B والمتجه c فيتم اختيارهما بأشكال متعددة أملاً في أن تتحقق شروط التقارب التي سنوردها لاحقاً .

طريقة جاكوبي نفرّق A إلى ثلاث مصفوفات

$$A = L + D + U$$

حيث D هي المصفوفة القطرية التي قطرها يساوي قطر A ، أما L فهي المصفوفة التي نحصل عليها من A بجَعل جميع عناصر القطر والعناصر التي فوقه أصفاراً وإبقاء جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي على حالها . ونحصل على المصفوفة U بإبقاء عناصر A الواقعة فوق القطر الرئيسي وحذف جميع عناصر القطر والعناصر الواقعة تحته .

نختار الآن B و c على النحو التالي

$$B = - D^{-1} (L + U) \ , \ c = D^{-1} b$$

طريقة غوص ـ سايدل . نختار B و c كما يلي

$$B= - (L + D)^{-1} U \ , \ c = (L + D)^{-1} b$$

حيث تم تعريف L, D, U في طريقة جاكوبي .

ملاحظة . إذا كان أحد عناصر القطر الرئيسي في A مساوياً للصفر فإنه لا يمكن تطبيق أيٍ من الطريقتين ، وعندئذٍ نضيف إحدى المعادلات إلى تلك المعادلة الموافقة للعنصر الصفري .

شروط التقارب . إن الشرط الكافي لتقارب المتتالية $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ إلى المتجه الحل هو أن يكون

$$| \lambda_i | < 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

حيث λ_i هي القيم الذاتية للمصفوفة B .

اختبارات التقارب . لما كان من الصعب أحياناً التأكد مباشرة من شرط التقارب ، فإننا نلجأ إلى اختبارات التقارب :

(a) إذا كان مجموع القيم المطلقة لعناصر أي سطر أو عمود في B أصغر من الواحد ، عندئذٍ تتقارب المتتالية إلى الحل .

(b) تتقارب متتالية الحلول إلى الحل الحقيقي في طريقة جاكوبي إذا تحقق الشرط

$$| a_{i1} | + | a_{i2} | + \dots + | a_{i,i-1} | + | a_{i,i+1} | + \dots + | a_{in} | < | a_{ii} |$$

من أجل جميع قيم i .

التقريب الصفري . ما هو المتجه الحل X_0 الذي نبدأ به ؟
في الحقيقة يمكن أن نبدأ بالمتجه $X_0 = D^{-1} b$.

278 b. معيار (نظيم) مصفوفة

لكي نقارن مصفوفة بأخرى لا بد لنا من مقياس للمقارنة ، وهكذا نقابل كل مصفوفة A بعدد نرمز له بـ $\| A \|$ ونسميه **معيار المصفوفة** A وذلك عند تَحقُّق الشروط التالية من أجل أي مصفوفة B :

$$\| A \| > 0 \ , \ A \neq 0 \ (\| O \| = 0)$$

$$\| k A \| = | k | \, \| A \|$$ (k عدد حقيقي أو عقدي)

$$\| A + B \| \leqq \| A \| + \| B \|$$

$$\| A B \| \leqq \| A \| \, \| B \|$$

ومن أشهر المعايير المستخدمة

$$\| A \|_1 = \max_j \sum_i | a_{ij} | \ ; \qquad \| A \|_\infty = \max_i \sum_j | a_{ij} |$$

$$\| A \|_E = \sqrt{ (\sum_{i,j} | a_{ij} |^2) }$$

المعيار الاقليدي لمتجه X هو العدد

$$\| X \| = (| x_1 |^2 + | x_2 |^2 + \ldots + | x_n |^2)^{1/2}$$

279. دقة الحل

عند حل جملة المعادلات (1) فإننا نعمد إلى تدوير الأخطاء في الأمثال ، مما يؤدي إلى تراكم الأخطاء بصورة تتطلب دراسة جدّية . إذ أن تراكم الأخطاء قد يؤدي إلى عدم صحة الحل الذي نحصل عليه ، ولتقليل هذه الأخطاء فإن علينا (ما أمكن) اعادة ترتيب عناصر المصفوفة بحيث يكون **المُرتَكز** (انظر 277) في أي مرحلة من مراحل الحذف أكبر بالقيمة المطلقة من القيمة المطلقة لأي عنصر من عناصر ذلك العمود الذي يحوي المرتكز .

ونشير هنا إلى أن طريقة الحذف لغوص تتطلب كمية من الحسابات أقل من تلك التي تتطلبها قاعدة كرامر .

ويتم تقييم مقدار الخطأ المرتكب $\{r\}$ للحل التقريبي $\{x_r\}$ للجملة $A X = b$ من العلاقة

$$\{r\} = \{b\} - A\{x_r\}$$

التي تعطي فكرة عن تضاؤل أو تزايد الخطأ .

جُمل المعادلات عليلة الشرط هي تلك الجمل التي يتأثر فيها الحل تأثراً كبيراً عندما تتغير الأمثال تغيراً طفيفاً . ولا ينفع في مثل هذه الحالة تقييم الخطأ الوارد أعلاه .

مثال . أوجد حل الجملة

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$
$$4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1$$

لدينا هنا

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \{b\} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

نأخذ المصفوفة الموسعة $A \mid b$ ونجري عليها العمليات الواردة في 277 (طريقة الحذف لغوص) فنجد

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right)$$

وبالتالي نجد أن المعادلات الأصلية تأخذ الشكل المكافىء

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$
$$-2x_2 - x_3 = -7$$
$$5x_3 = 15$$

وباستخدام التعويض التراجعي نحصل على

$$x_3 = 3\ ,\ x_2 = 2\ ,\ x_1 = 1$$

أما المصفوفة المعاكسة لمصفوفة الأمثال فهي

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

مثال . لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

فإن المعادلة المميزة $det\,(A - \lambda I) = 0$ هي

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

والقيم الذاتية هي $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$

أما المتجهات الذاتية الموافقة فهي

$$X_1 = \begin{Bmatrix} k \\ 0 \\ k \end{Bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{Bmatrix} 3\ell \\ 2\ell \\ \ell \end{Bmatrix} \quad , \quad X_3 = \begin{Bmatrix} m \\ 3m \\ m \end{Bmatrix}$$

حيث k, ℓ, m ثوابت اختيارية .

280. معكوس مصفوفة (مقلوب مصفوفة)

إن إيجاد المصفوفة A^{-1} المعاكسة لمصفوفة A من العلاقة $A^{-1} = [\,adj\,A\,] / d\,(A)$ يتطلب كمية من الحسابات لا تطاق عندما تكون مرتبة

A كبيرة . نعرض فيما يلي طريقة أكثر فعالية لحساب A^{-1} . وهي أن نضع المصفوفة الواحدية I بجوار المصفوفة A أي $I \mid A$. نجري على المصفوفة $(A \mid I)$ عمليات على الأسطر باستخدام طريقة الحذف لغوص فتؤول A إلى مثلثية U وتؤول I بالنتيجة إلى مصفوفة I' أي نحصل على $(U \mid I')$ ، نعيد طريقة الحذف لغوص من أجل تحويل U إلى قطرية وبالتالي إلى واحدية فنحصل على

$$(I \mid A^{-1})$$

وننبه إلى أن حساب المصفوفة المعاكسة بدقة هو أمر شاق في الغالب ويجب تجنبه ما أمكن ذلك .

281. تحليل مصفوفة إلى مصفوفتين مثلثيتين (طريقة تشوليسكي)

يمكن تحليل المصفوفة $A = (a_{ij})$ إلى جداء مصفوفتين بالشكل $A = L\,U$ حيث L هي مصفوفة مثلثية سفلى و U مصفوفة مثلثية عليا ونكتب

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & l_{nn} \end{pmatrix}$$

(1)

$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

بافتراض أن مصفوفات الصغار الرئيسية للمصفوفة A ليست شاذة (انظر 262) ، أي إذا كان

$$a_{11} \neq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \ldots, |A| \neq 0$$

ويتم إيجاد عناصر L و U من العلاقة $L\,U = A$. وهكذا فإن جداء أسطر L بالعمود الأول من U يعطي العمود الأول من A أي

$$l_{11} = a_{11}, l_{21} = a_{21}, \ldots, l_{n1} = a_{n1}$$

أما جداء السطر الأول من L بالعمود الثاني ، الثالث ، . . . الـ n من U فيعطي

$$l_{11}u_{12} = a_{12}, l_{11}u_{13} = a_{13}, \ldots, l_{11}u_{1n} = a_{1n}$$

حيث يتم إيجاد $u_{12}, u_{13}, \ldots, u_{1n}$. ويمكن الاستمرار بالضرب لإيجاد عناصر L و U ، وذلك باتباع الترتيب التالي : أوجد عناصر العمود الأول من L ، ثم عناصر السطر الأول من U ، ثم عناصر العمود الثاني من L فعناصر السطر الثاني من U ، . . . وهكذا .

وبصورة عامة لدينا

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \qquad i \geqq j$$

(2)

$$l_{ii}u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \qquad i < j$$

ويتم حساب العناصر بالترتيب التالي

$\ell_{11},\ \ell_{21},\ \ldots,\ u_{12},\ u_{13},\ \ldots;\ \ell_{i1},\ u_{1j};\ \ell_{i2},\ u_{2j};\ \ldots;\ \ell_{i,n-1},\ u_{n-1,j};\ \ell_{nn}$

282. استخدام L و U لحل جملة معادلات

عندما تكون A غير شاذة وقابلة للتحليل إلى $A = L\,U$ فالجملة

$$A\{x\} = \{b\} \quad \text{أو} \quad LU\{x\} = \{b\} \qquad (1)$$

يمكن أن تُحلّ كما يلي : نفرض أن $U\{x\} = \{z\}$ ، عندئذٍ

$$L\{z\} = \{b\} \qquad (2)$$

أو

$$\begin{cases} l_{11}z_1 & = b_1 \\ l_{21}z_1 + l_{22}z_2 & = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ l_{n1}z_1 + l_{n2}z_2 + \cdots + l_{nn}z_n & = b_n \end{cases} \qquad (3)$$

ويمكن من (3) حساب $z_1, z_2, \ldots, z_n$ بصورة متتالية ثم حساب $\{x\}$ من $U\{x\} = \{z\}$ أي من

$$\begin{cases} x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \cdots + u_{1n}x_n = z_1 \\ \qquad\quad x_2 + u_{23}x_3 + \cdots + u_{2n}x_n = z_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n = z_n \end{cases} \qquad (4)$$

وذلك باستخدام التعويض التراجعي .

وتسمى جميع الطرائق التي تعتمد تحليل المصفوفة إلى عوامل **بالمخططات المتراصة** . حيث تنجح هذه الطرائق سواء بالحساب اليدوي أو باستخدام

الحاسبات . ومن المناسب أن نذكر أنه إذا تم تحليل A فإن إيجاد المصفوفة المعاكسة يتم من العلاقة

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1} \tag{5}$$

إذ أن إيجاد المصفوفة المعاكسة لمصفوفة مثلثية يتم بسهولة .

فضاءات المتجهات الخطية

283. تعاريف

فضاء المتجهات (الخطي) هو مجموعة V من العناصر (التي نسميها متجهات) ، نعرّف عليها عملية (+) بين كل عنصرين من V ونسميها عملية «**الجمع**» ، وعملية أخرى (.) بين كل عنصر من V وكل عنصر من حقل F (قد يكون مجموعة الأعداد الحقيقية) نسميها عملية «**الضرب بعدد**» ، وبحيث تتحقق الخواص التالية :

I. إذا كان α, β عنصرين من V فإن $\alpha + \beta$ عنصر وحيد من V .
ويتحقق ما يلي من أجل أي ثلاثة متجهات (عناصر) α, β, γ من V .

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(3) يوجد في V عنصر حيادي O يحقق $\alpha + O = O + \alpha = \alpha$

(4) يوجد مقابل كل α عنصر وحيد (**نظير** α) $-\alpha$ بحيث

$$\alpha + (-\alpha) = O$$

II. إذا كان α عنصراً من V ، c سلمياً (عدداً حقيقياً عندما $F = R$) فإن $c \,.\, \alpha$ عنصر وحيد من V ويتحقق ما يلي من أجل أي عنصرين $\alpha, \beta \in V$ وأي $c,\ d \in F$.

$$c \,.\, (\alpha + \beta) = c \,.\, \alpha + c \,.\, \beta \qquad (5)$$

$$(c + d) \,.\, \alpha = c \,.\, \alpha + d \,.\, \alpha \qquad (6)$$

$$(c\, d) \,.\, \alpha = c \,.\, (d \,.\, \alpha) \qquad (7)$$

$$1 \,.\, \alpha = \alpha \qquad (8)$$
(1 هو عنصر الواحدة في F)

ملاحظة : إذا كان $F = R$ نحصل على فضاء المتجهات الحقيقي ، كما أن العنصر السلمي من الحقل يصبح عدداً حقيقياً .

مثال . لتكن المجموعة $V_n(F)$ المكونة من جميع المتجهات ذات الـ n مركبة والتي تعرف عليها عملية جمع متجهين ، وضرب متجه بسُلّمي كما يلي :

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) \\ &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \\ c\alpha &= c(a_1, \ldots, a_n) = (ca_1, \ldots, ca_n)\end{aligned}$$

حيث a_i, b_i, c هي سُلّميات . هذه المجموعة مع العمليتين تشكل فضاء متجهات .

284. فضاء المتجهات الجزئي

الفضاء الجزئي S من فضاء المتجهات V هو مجموعة جزئية من V تشكل بحد ذاتها فضاء متجهات بالنسبة لعملية «الجمع» نفسها والضرب بعدد نفسه .

نظرية إذا كانت S مجموعة جزئية من V فإن الشرط اللازم والكافي لتكون S **فضاء متجهات جزئي** هو أن يتحقق الشرطان :

(1) إذا كان $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ عنصرين من S فإن $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ عنصر وحيد من S .

(2) إذا كان c سُلّمياً و $\boldsymbol{\alpha} \in S$ فإن $\boldsymbol{\alpha} . c \in S$.

285. توليد الفضاء

التركيب الخطي هو العنصر الوحيد $c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \ldots + c_m \xi_m$ الذي ينتمي إلى V حيث $c_1, c_2, \ldots$ سُلميات من F و $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ متجهات من V .

إن مجموعة جميع التراكيب الخطية التي تنتج عن مجموعة من المتجهات $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ المنتمية إلى V تشكل فضاء متجهات جزئي من V **مُولَّد** من $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$ نرمز له بـ $\mathfrak{L}\ (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ ونسمي $\xi_1, \ldots, \xi_m$ **مولِّدات** هذا الفضاء .

286. متجهات الواحدة

يتم توليد فضاء المتجهات الخطي $V_n(F)$ من n من المتجهات الخاصة التي نسميها متجهات الواحدة والمعرفة كما يلي

$$\epsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \epsilon_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots$$
$$\epsilon_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

ويمكن التعبير عن أي متجه $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ من $V_n(F)$ **بتركيب خطي** بدلالة $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ كما يلي

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$$

ونقول إن $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ تولّد كل الفضاء $V_n(F)$.

287. الاستقلال والارتباط الخطي

نقول إن المتجهات $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ **مستقلة خطياً** على الحقل F إذا وفقط إذا كان تَحقُّق العلاقة $c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \ldots + c_m \alpha_m = 0$ لا يتم إلا إذا كان $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$. أما إذا كان يوجد مجموعة من السلميات $c_1, \ldots, c_m$ ليست جميعها أصفاراً وبحيث تتحقق العلاقة السابقة فإن مجموعة المتجهات **مرتبطة خطياً** .

نظرية . إذا كان المتجه الصفري عنصراً من مجموعة متجهات فإن هذه المجموعة مرتبطة خطياً .

نظرية . تكون مجموعة المتجهات غير الصفرية $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ من V مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا أمكن التعبير عن أحد هذه المتجهات بتركيب خطي بدلالة باقي المتجهات .

288. الأساس (القاعدة)

أساس فضاء متجهات V هو أكبر عدد من المتجهات المستقلة خطياً التي يمكن الحصول عليها من الفضاء . ويمكن انتقاء لا نهاية من الأسس لفضاء متجهات .

عدد أبعاد الفضاء هو عدد متجهات الأساس .

نظرية (a) يمكن التعبير عن أي متجه من V بتركيب خطي بدلالة متجهات الأساس بشكل وحيد .

(b) إذا كان عدد متجهات الأساس منتهياً فإن لأي أساس آخر العدد نفسه من المتجهات .

(c) إذا كان عدد أبعاد فضاء متجهات هو n فإن أي $n + 1$ من المتجهات تكون مرتبطة خطياً .

(d) لكي تكون مجموعة من المتجهات أساساً لفضاء متجهات V يكفي أن تولّد هذه المجموعة الفضاء V وأن تكون مستقلة خطياً .

(e) إذا كان T , S فضائين جزئيين من V فإن

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(S \cap T) + \dim(S \cup T)$$

حيث $\dim(S)$ يشير إلى عدد أبعاد S .

289. الجداء الداخلي

نعرّف الجداء الداخلي لمتجهين , $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\eta = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ لهما مركبات حقيقية بالعلاقة

$$(\xi, \eta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

خواص الجداء الداخلي

$$(\xi, \eta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

(1) $(\xi + \eta, \zeta) = (\xi, \zeta) + (\eta, \zeta)$ (الخطية في العامل اليساري)

(2) $(c\xi, \eta) = c(\xi, \eta)$ (الخطية في العامل اليساري)

(3) $(\xi, \eta) = (\eta, \xi)$ (التناظر)

(4) $(\xi, \xi) > 0 \quad , \quad \xi \neq 0$ (الايجاب)

تبين الخواص (3) ,(2) ,(1) أن الجداء الداخلي ثنائي الخطية وأنه متناظر .

ملاحظة . إذا كانت مركبات المتجهين ξ و η أعداداً عقدية فإن الجداء الداخلي يُعرّف على النحو التالي

$$(\xi,\eta) = x_1 y_1^* + x_2 y_2^* + \dots + x_n y_n^*$$

حيث y_i^* هو مرافق العدد y_i . أما **طول المتجه** ξ فهو

$$|\xi| = (\xi, \xi)^{1/2}$$

290. فضاء المتجهات الإقليدي

فضاء المتجهات الاقليدي هو فضاء متجهات E يكون فيه $F = R$ أي أن السُّلميات تصبح أعداداً حقيقية . وتبقى جميع الخواص التي يحققها فضاء المتجهات المعرف على حقل F صحيحة . ويسمى هذا الفضاء أحياناً **فضاء المتجهات الحقيقي** . وهكذا فطول المتجه ξ مثلاً هو $|\xi| = (\xi,\eta)^{1/2}$

نظرية . في أي فضاء متجهات إقليدي ، يحقق الطول الخواص التالية :

(1) $|c\xi| = |c| \cdot |\xi|$ (2) $|\xi| > 0$

(3) $|(\xi,\eta)| \leqq |\xi| \cdot |\eta|$ (متراجحة شفارتز)

(4) $|\xi + \eta| \leqq |\xi| + |\eta|$ (متراجحة المثلث)

291. الفضاءات المُعيَّرة (المنظَّمة)

إذا قابلنا كل عنصر α من فضاءات متجهات V بعدد حقيقي نرمز له بـ $\|\alpha\|$ وكان هذا العدد يحقق شروطاً محددة، فإننا نسمي العدد **معياراً** (نظيماً) للعنصر α ، ونسمي V **فضاءات المتجهات المعيّر** . شروط كون $\|\alpha\|$ معياراً :

$\| \alpha \| > 0 \quad \alpha \neq O \quad (\| O \| = 0)$

$\| k \alpha \| = | k | \; \| \alpha \|$ (k عدد حقيقي أو عقدي)

$\| \alpha + \beta \| \leqq \| \alpha \| + \| \beta \|$ ($\forall \beta \in V$)

$\| \alpha \beta \| \leqq \| \alpha \| \| \beta \|$

نظرية . إن طول المتجه ξ المعرّف في فضاء المتجهات الإقليدي $|\xi| = (\xi, \xi)^{1/2}$ هو معيار .

تابع المسافة(المَقَاس) هو تابع يقابل كل عنصرين α , β من فضاء متجهات V بعدد حقيقي $d(\alpha, \beta)$ نسميه المسافة بين α و β ، على أن يحقق هذا التابع الشروط التالية من أجل أي $\gamma, \alpha, \beta \in V$:

$$\begin{cases} d(\alpha, \beta) \geqq 0 \\ d(\alpha, \beta) = 0 \end{cases}$$

$$d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$$

$$d(\alpha, \gamma) \leqq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma)$$

مثال . إن تابع المسافة (المسافة ، المقاس) بين عنصرين ξ, η في الفضاء الأقليدي E هو $|\xi - \eta|$.

ملاحظة . لقد تم استخدام الرمز $\| \;\; \|$ من أجل أي معيار . أما المعيار (الطول) في الفضاء الأقليدي فرمزنا له بـ $| \;\; |$.

الزاوية θ **بين متجهين** ξ و η يمكن أن تعرّف بالعلاقة

$$\cos \theta = (\xi, \eta) / |\xi| . |\eta|$$

حيث $0 \leqq \theta \leqq 180°$.

292. التعامد

نقول عن عنصرين ξ, η من فضاء متجهات V بأنهما **متعامدان** ونكتب $\xi \perp \eta$ إذا كان $(\xi, \eta) = 0$.

نظرية . إذا تعامد متجه مع المتجهات $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ فإنه يتعامد مع أي متجه ينتمي إلى الفضاء الجزئي الذي تولّده $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

متجه الواحدة هو متجه ξ بحيث $|\xi| = 1$.

متجهات الواحدة المتعامدة . هي مجموعة متجهات $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ من الفضاء الأقليدي بحيث $\xi_i \perp \xi_j \; (i \neq j)$ و $|\xi_i| = 1$ من أجل كل i .

الأساس المتعامد الواحدي . لفضاء E هو أساس يتكون من متجهات الواحدة المتعامدة .

نظرية . يوجد أساس متعامد واحدي لكل فضاء متجهات إقليدي عدد أبعاده منته .

التحويلات الخطية . كثيرات الحدود

293. التحويل الخطي

التحويل الخطي هو تطبيق (تابع) T يقابل كل متجه α من فضاء متجهات V بمتجه وحيد $T\alpha$ من فضاء متجهات W وبحيث تتحقق الشروط التالية . من أجل أي متجهين β, α من V وأي عدد حقيقي r :

(1) $T(\alpha + \beta) = T\alpha \oplus T\beta$

(2) $T(r \cdot \alpha) = r \odot T\alpha$

حيث + و . هما العمليتان المرتبطتان بالفضاء V و $\oplus$ و $\odot$ هما العمليتان المرتبطتان بـ W .

ملاحظة . يمكن ضم الشرطين (1) و (2) بشرط واحد هو

$$T\Big[(r_1 . \alpha) + (r_2 . \beta) \Big] = (r_1 \odot T \alpha) \oplus (r_2 \odot T \beta)$$

مهما يكن العددان الحقيقيان r_1 , r_2 .

نسمي T **مؤثراً** على V إذا كان $V = W$.

إذا كان T_1 و T_2 مؤثرين على V فإنه يمكن تعريف $T_1 + T_2$ على النحو التالي

$$(T_1 + T_2) \alpha = T_1 \alpha + T_2 \alpha$$

من أجل أي α من V .

أمثلة . ليكن V_n فضاء المتجهات ذات الـ n مركبة .

(a) التطبيق $T : V_3 \to V_2$ المعرف بالعلاقة

$$T\Big[(x, y, z) \Big] = (x , y)$$

هو تحويل خطي .

(b) التطبيق $T : V_2 \to V_2$ المعرف بالعلاقة

$$T [(x , y) = (x + 1 , y)$$

ليس تحويلاً خطياً .

(c) ليكن V فضاء متجهات جميع التوابع الحقيقية المستمرة مع العملية المألوفة لجمع تابعين ، وعملية الضرب المألوفة لتابع بعدد .

إن التطبيق $T : V \to V$ المعرف بالعلاقة

$$(Tf)x = \int_0^x f(x)\,dx$$

هو تحويل خطي لأن

$$\int_0^x [r_1 f_1(x) + r_2 f_2(x)]\,dx = r_1 \int_0^x f_1(x)\,dx + r_2 \int_0^x f_2(x)\,dx$$

294. كثيرات الحدود

كثير الحدود من الدرجة n هو عبارة من الشكل

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad a_n \neq 0$$

نفرض ضمناً أن الأمثال a_i تنتمي إلى حقل F (قد يكون مجموعة الأعداد الحقيقية R أو العقدية C).

إذا كان $k \leqq n$ $\qquad g = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i \qquad f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

فإن

(المجموع) $$f + g = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_i)x^i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i x^i$$

(الجداء) $$fg = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_i b_j x^{i+j}$$

أي أن

$$fg = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots + a_nb_kx^{k+n}$$

فإذا كان $fg = gh$ و $f \neq 0$ فإن $g = h$.

تحقق كثيرات الحدود قوانين التجميع والتبديل والتوزيع ، أي

$$fg = gf \, , \, f + g = g + f \, , \, f(gh) = (fg)h$$

$$(f+g) + h = f + (g+h) \, , \, f(g+h) = fg + fh$$

إذا كان $g \neq 0$ فإنه يوجد كثيرا حدود وحيدان r و q بحيث $f = qg + r$ أما r فهو إما مساوٍ للصفر أو من درجة أقل من درجة g . ونسمي q **خارج القسمة** (ناتج القسمة) و r **الباقي** .

295. القاسم المشترك الأعظم

إن لكل كثيري حدود p و q في x **قاسم مشترك أعظم** d نرمز له بـ ق.م.أ أو $g.c.d$ بحيث

(1) $d \mid p$ و $d \mid q$

(2) $c \mid d \rightarrow c \mid p$ و $c \mid p$

(3) $d = sp + tp$ حيث s و t كثيرا حدود في x .

$d \mid p$ تعني هنا أن « d يقسم p » أي « p يقبل القسمة على d بدون باق» .

نقول إن كثيري الحدود p و q **أوليان** فيما بينهما إذا كان القاسم المشترك الأعظم لهما هو الواحد أو مضاعفاته . إذا لم يقبل كثير حدود القسمة على أي عدد أو أي كثير حدود آخر سميناه كثير حدود أولي (غير قابل للاختزال) .

296. التطابق

إذا تطابق كثيرا حدود A و B

$$A = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \text{و} \qquad B = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

درجة كل منهما أصغر أو تساوي n من أجل قيم مختلفة لـ x عددها أكبر أو يساوي n فإن كثيري الحدود متطابقان ونكتب $A \equiv B$ أي $a_i \equiv b_i$ من أجل $i = 1, 2, \ldots, n$.

297. معادلات كثيرات الحدود

ليكن $$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

كثير حدود من الدرجة n بأمثال حقيقية a_i و $a_n \neq 0$. نسمي العدد x_0 **صفراً** لكثير الحدود $p(x)$ إذا كان $p(x_0) = 0$. كما يسمى العدد x_0 **جذراً** للمعادلة $p(x) = 0$.

نظريات متنوعة . (a) إذا كان $n \geqq 1$ فإنه يوجد n صفر لـ $p(x)$ ، بما فيها الأصفار المضاعفة حيث نعتبر الصفر المضاعف k مرة على أنه k صفراً .

(b) إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ أصفاراً لـ $p(x)$ فإن

$$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

(c) يكون x_0 صفراً مضاعفاً من المرتبة k لكثير الحدود $p(x)$ إذا وفقط إذا كان

$$p(x_0) = p'(x_0) = p''(x_0) = \ldots = p^{(k-1)}(x_0) = 0, \; p^{(k)}(x_0) \neq 0$$

حيث $p'(x_0)$ تعني قيمة المشتق عندما $x = x_0$.

(d) إذا كان $z = \alpha + i\beta$ صفراً عقدياً لـ $p(x)$ ، $(i^2 = -1)$ فإن $\overline{z} = \alpha - i\beta$ هو صفر لـ $p(x)$ ويمكن أن نكتب

$$p(x) = (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)\, q(x)$$

حيث $q(x)$ كثير حدود من الدرجة $n-2$.

(e) إذا قسمنا $p(x)$ على $x - \alpha$ فإن

$$p(x) = (x - \alpha)\, q(x) + b_0$$

حيث $q(x)$ (خارج القسمة) كثير حدود من الدرجة $n-1$ ، أما b_0 فهو الباقي ويحقق العلاقة

$$p(\alpha) = b_0$$

(f) يكون α صفراً لكثير الحدود $p(x)$ إذا وفقط إذا كان

$$p(x) = (x - \alpha)\, q(x)$$

15. التحليل العددي

المعادلات اللا خطية

298. حل المعادلات اللا خطية

نعرض فيما يلي عدة طرائق تقريبية لإعطاء الجذور التقريبية للمعادلة

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

حيث $f(x)$ تابع لـ x .

299. التكرير الخطي

نكتب المعادلة (1) بالشكل

$$x = g(x) \qquad (2)$$

ونفرض أن $x = x_0$ هو جذر تقريبي نسميه التقريب الصفري للجذر المضبوط $x = \xi$ للمعادلة (2) ، فإن تقريباً آخر لـ ξ هو x_1 نحصل عليه من $x_1 = g(x_0)$. وهكذا يمكن توليد تقريبات متتالية لـ ξ والحصول على متتالية $x_0, x_1, x_2, \ldots$ من العلاقة

$$(3) \qquad x_{i+1} = g(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

وليكون عملنا مفيداً فإن المطلوب أن تتقارب هذه المتتالية إلى الجذر ξ . ونورد فيما يلي النظرية التي تضمن تقارب المتتالية إلى الجذر ، الأمر الذي يسمح لنا بالقول إن تكرار هذه العملية يزيد اقترابنا من الجذر .

نظرية 1. إذا كان المجال I يحتوي جذراً $x = \xi$ للمعادلة (1) وكان $g(x)$ و $g'(x)$ مستمرين في I ، وإذا كان $|g'(x)| \leqq K < 1$ من أجل جميع قيم x في I ، فإن المتتالية $x_0, x_1, \ldots$ تتقارب إلى ξ ، على أن نأخذ $x_0 \in I$.

نسمي الطريقة أعلاه **طريقة التكرير** (المعاودة) .

إذا تقاربت المتتالية إلى الجذر ξ فإن الخطأ المرتكب e_i في حساب الجذر عند الخطوة i هو $e_i = x_i - \xi$ ويتناسب هذا الخطأ مع الخطأ المرتكب في الخطوة السابقة وهكذا نكتب

$$\lim_{i \to \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = g'(\xi)$$

الدقة إذا كان المطلوب حساب الجذر بدقة ϵ فإن عملية التكرير تتوقف عند x_i إذا تحقق ما يلي

$$(4) \quad |f(x_i)| < \epsilon \quad \text{or} \quad |x_{i+1} - x_i| < \epsilon \quad \text{or} \quad \frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_{i+1}|} < \epsilon$$

مثال أوجد الجذر الموجب ξ للمعادلة $f(x) \equiv x^2 - 2x - 8 = 0$

نكتب المعادلة بالشكل $x = \sqrt{2x + 8} \equiv g(x)$

نختار $x_0 = 6$ كتقريب صفري للجذر ξ . وبإجراء التكرير المتتالي من العلاقة $x_{i+1} = g(x_i) \equiv \sqrt{2x_i + 8}$ يعطي

$$x_1 = 4.4721, \quad x_2 = 4.1163, \quad x_3 = 4.0290, \quad x_4 = 4.0072,$$

$$x_5 = 4.0020, \ \ldots$$

وهذه المتتالية تتقارب إلى الجذر $\xi = 4$ ، لأن

$$|g'(x)| = \frac{1}{\sqrt{2x+8}} \leqq \frac{1}{\sqrt{6}} < 1$$

في المجال $[-1, 7]$.

أما إذا كتبنا المعادلة بالشكل $x = (x^2 - 8)/2 \equiv g(x)$ وأخذنا $x_0 = 6$ نحصل على المتتالية

$$x_0 = 6, \ x_1 = 14, \ x_2 = 94, \ \ldots.$$

وهي متباعدة ولا تتقارب إلى أي جذر .

لاحظ هنا أن $|g'(x)| = |x| \geqq 1$.

ملاحظة هامة . إذا كان $|g'(x)| \geqq 1$ فليس من الضروري أن تكون متتالية التقريب متباعدة ، إذ لو أخذنا في المثال السابق $x_0 = 2$ لوجدنا أن

$$x_1 = -2, \ x_2 = -2, \ \ldots$$

وهذا يعني أن $x = -2$ هو جذر للمعادلة .

300. طريقة نيوتن - رافسون

تعتمد طريقة نيوتن لإيجاد الجذر $x = \xi$ للمعادلة $f(x) = 0$ على العلاقة

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \equiv g(x_i) \tag{5}$$

لتوليد تقريبات متتالية لـ ξ .

نظرية 2. إذا كانت $f''(x)$ و $f'(x)$ و $f(x)$ مستمرة ومحدودة في مجال I يحوي ξ وكان $f'(\xi) \neq 0$ ، فإنه يوجد مجال J يحوي $x = \xi$ بحيث تتقارب المتوالية التي تولدها (5) إلى ξ جذر المعادلة $f(x) = 0$ على أن يكون $x_0 \in J$.

إن أي اختيار لـ x_0 بحيث

$$|g'(x_0)| = \frac{|f(x_0)f''(x_0)|}{[f'(x_0)]^2} < 1 \tag{6}$$

سيؤدي حتماً إلى التقارب المتتالية إلى الجذر .

نسمي التكرير المتقارب الذي يحقق الشرط $e_{i+1} = k\, e_i^2$ **التكرير من المرتبة الثانية** ، حيث k ثابت و $e_i = x_i - \xi$ ، كما نقول إن **التكرير يتقارب تربيعياً** .

نظرية 3. إذا تحققت النظرية 2 وكان $f'''(x)$ محدوداً ومستمراً فإن

$$\lim_{i \to \infty} \frac{e_{i+1}}{{e_i}^2} = \frac{1}{2} g''(\xi) \tag{7}$$

وتتقارب طريقة نيوتن تربيعياً .

مثال احسب $\sqrt{A}$ عندما $A > 0$. إن حساب $\sqrt{A}$ يعني إيجاد الجذر الموجب للمعادلة $f(x) \equiv x^2 - A = 0$ ولكن $f'(x) = 2x$ وهكذا نجد من (5) أن

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left[x_i + (A / x_i) \right]$$

لو أخذنا $A = 2$ واخترنا $x_0 = 1.4$ لوجدنا من هذه العلاقة أن

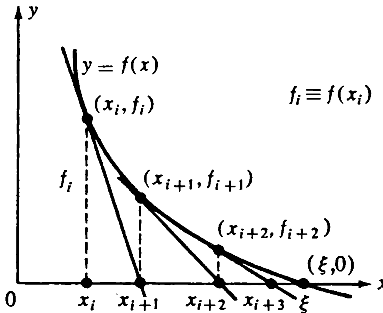
$$x_1 = 1.41428,\ x_2 = 1.41421,\ x_3 = 1.41421,\ \ldots$$

تتقارب بسرعة إلى $\sqrt{A}$.

301. التفسير الهندسي

بفرض أن x_i هو تقريب للجذر $x = \xi$ للمعادلة $f(x) = 0$. فإن ميل المماس للمنحني $y = f(x)$ في النقطة $x = x_i$ هو $f'(x_i)$ ، أما x_{i+1} فهي فاصلة (سين) نقطة تقاطع هذا المماس مع المحور ox .

أما عيب طريقة نيوتن فهو حساب $f'(x)$ الأمر الذي يكون صعباً في الغالب . ولذلك إذا اخترنا x_0 بعيدة جداً عن ξ فقد تتباعد متتالية التقريب وقد تتقارب إلى جذر آخر غير ξ للمعادلة .



طريقة نيوتن - رافسون

302. طريقة التقاطع

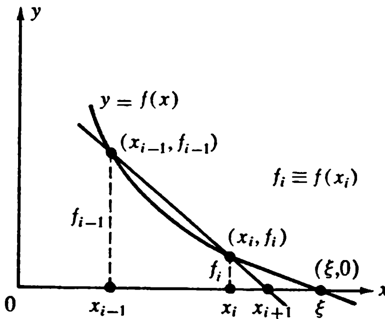
نختار أولاً تقريبين للجذر $x = \xi$ للمعادلة $f(x) = 0$ هما x_0 و x_1 ثم نولد التقريبات المتتالية من العلاقة

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \tag{8}$$

عندما تتقارب المتوالية الناتجة ، فإنها غالباً ما تكون أفضل من طريقة التكرير الخطي .

303. التفسير الهندسي

إن الوتر المار من النقطتين $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ و $(x_i, f(x_i))$ يقطع المحور ox في النقطة $(x_{i+1}, 0)$ وتكون x_{i+1} التقريب التالي لـ x_i للجذر $x = \xi$.



طريقة القاطع

304 a. طريقة المحاولة والخطأ (الموضع الخطأ)

نختار أولاً تقريبين للجذر $x = \xi$ للمعادلة $f(x) = 0$ هما x_0 و x_1 بحيث $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$. ثم نحسب التقريب التالي x_2 من العلاقة

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \quad (9)$$

نفرض أن الخطأ المسموح به هو ϵ . فإذا كان $| x_2 - x_0 | < \epsilon$ أو $| x_2 - x_1 | < \epsilon$ فإننا تقبل x_2 جواباً للمسألة . إذا لم يكن الأمر كذلك فإننا نتصرف كما يلي :

إذا كان $f(x_0) f(x_2) < 0$ نضع x_2 بدلاً من x_1 في (9) ونبقي x_0 على حالها ونحسب التقريب التالي x_3 من (9) ونعيد اختبار الدقة والخطأ . إذا لم يكن $f(x_0) f(x_2) < 0$ نضع x_2 بدلاً من x_0 ونبقي x_1 على حالها في (9) ثم نحسب التقريب التالي x_3 ونعيد اختبار الدقة والخطأ . نستمر على هذا المنوال حتى تتحقق الدقة المطلوبة .

304 b. طريقة التقسيم النصفي

نفرض أنه يوجد للمعادلة $f(x) = 0$ جذر واحد فقط $x = \xi$ في المجال (a,b) ، ونفرض أن $f(x)$ مستمر في هذا المجال عندئذٍ $f(a) f(b) < 0$.
نحسب قيمة التابع $f(x)$ في منتصف المجال عند $x = (a + b) / 2$ فإذا كان

$f(a) f\left[\frac{a+b}{2}\right] < 0$ فالجذر في المجال $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$

وإلا فهو في المجال $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.

نكرر العملية من جديد على المجال الذي يكون فيه الجذر . . . وهكذا .

أما متتالية التقريب فهي كما يلي x_0 هي أي قيمة في المجال (a,b) ، x_1 أي قيمة في نصف المجال الذي يحوي الجذر ، . . . وهكذا .

c 304. عزل الجذور

تتطلب معظم الطرائق التقريبية أن نحدد سلفاً مجالاً يحوي جذراً واحداً فقط للمعادلة $f(x) = 0$ ، تسمى هذه العملية عزل أو **فصل الجذور** ، وليست هذه العملية سهلة عموماً ولكننا نورد هنا نظرية تساعد في عملية فصل الجذور .

نظرية إذا كان $f(x)$ و $f'(x)$ مستمرين في مجال $[a,b]$ وكان $f(a)f(b) < 0$ و $f'(x)$ لا يغير إشارته في هذا المجال فإن للمعادلة $f(x) = 0$ جذراً واحداً في المجال (a,b) .

جذور معادلات كثيرات الحدود

---

305. معادلات كثيرات الحدود . الجذور الحقيقية

ليكن

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad a_n \neq 0 \tag{1}$$

كثير حدود من الدرجة n وبأمثال حقيقية a_k .

نفرض أن z هو عدد حقيقي . عندئذٍ يمكن إيجاد قيمة $p(z)$ من المتتالية $\{b_k\}, (k = n, n-1, \ldots, 1, 0)$ التي يتم توليدها من العلاقة

$$b_n = a_n \qquad b_{n-k} = a_{n-k} + zb_{n-k+1} \tag{2}$$

ويكون $p(z) = b_0$.

إذا قسمنا $p(x)$ على $x - z$ فإن

$$p(x) = (x - z)q(x) + b_0 \tag{3}$$

حيث يعطى خارج القسمة $q(x)$ بالعلاقة

$$q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_1 \tag{4}$$

أما b_0 فهو الباقي .

فإذا كان $p(z) = 0$ فإن $b_0 = 0$ وتكون $b_k \; (k = 1, \ldots, n)$ التي نحصل عليها من (2) هي أمثال $q(x)$. ولإيجاد الجذور الباقية للمعادلة فإننا نبحث عن أصفار $q(x)$ وهكذا . . . .

إذا كان $p(z) = 0$ فإن $p'(z) = q(z)$ حيث $p'(x)$ هو مشتق $p(x)$ بالنسبة لـ x .

لإيجاد $q(x)$ فإننا نولّد المتتالية $\{c_k\}, k = n, n-1, \ldots, 1$ من العلاقة

$$c_n = b_n \qquad c_{n-k} = b_{n-k} + zc_{n-k+1} \tag{5}$$

عندئذٍ $c_1 = q(z) = p'(z)$. نسمي العملية المستخدمة في (2) و (5) **الضرب المتداخل** .

306. طريقة نيوتن

لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة $p(z) = 0$. نقترح x_0 كتقريب صفري للجذر المضبوط ع لهذه المعادلة ثم نستخدم العلاقة

$$x_{i+1} = x_i - \frac{p(x_i)}{p'(x_i)} = x_i - \frac{b_0(x_i)}{c_1(x_i)} \tag{6}$$

لتوليد تقريبات متتالية لـ ع .

ويتم إيجاد القيمتين b_0 و c_1 لكل تقريب x_i من (2) و (5) حيث يتم وضع x_i بدلاً من z .

إذا كان ξ جذراً بسيطاً للمعادلة $p(x) = 0$ وكان x_0 قريباً لدرجة كافية من ξ فإن (6) تعطي متوالية $\{x_k\}$ تتقارب تربيعياً إلى ξ . ويتم إيجاد باقي الجذور من حل المعادلة $q(x) = 0$ حيث $q(x)$ معرفة في (4) .

أما عيب هذه الطريقة فيظهر إذا كان $p'(x)$ صغيراً بجوار الجذر أو عندما يكون لدينا جذر مضاعف .

307. معادلات كثيرات الحدود . الجذور العقدية

إذا كان $n > 2$ فإنه يمكن كتابة المعادلة (1) بالشكل

$$p(x) = (x^2 - \alpha x - \beta)q(x) + b_1(x - \alpha) + b_0 \tag{7}$$

حيث α , β حقيقيان و $q(x)$ هو خارج القسمة

$$q(x) = b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \cdots + b_2 \tag{8}$$

أما $b_1(x - \alpha) + b_0$ فهو الباقي . وتعطى الأمثال $b_k,\ k = 0, 1, \ldots, n$ بالعلاقات

$$\begin{cases} b_n = a_n \\ b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_n \\ b_{n-2} = a_{n-2} + \alpha b_{n-1} + \beta b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1 = a_1 + \alpha b_2 + \beta b_3 \\ b_0 = a_0 + \alpha b_1 + \beta b_2 \end{cases} \tag{9}$$

من الواضح في (9) أن $b_1 \equiv b_1(\alpha,\beta)$, $b_0 \equiv b_0(\alpha,\beta)$ هما تابعان لـ α و β . فإذا كان $x^2 - \alpha x - \beta$ عاملاً لـ $p(x)$ فإنه يمكن إيجاد α و β من المعادلتين :

$$b_1(\alpha,\beta) = 0 \qquad b_0(\alpha,\beta) = 0 \tag{10}$$

إيجاد $(x^2 - \alpha x - \beta)$. يتم إيجاد هذا العامل بصورة تقريبية وبالتالي الجذور الموافقة باتباع الخطوات التالية :

(a) نفرض (α_0 , β_0) هو التقريب الصفري لـ (α , β) .

(b) استخدم (9) لإيجاد b_k ; $k = n, n-1, \ldots, 2, 1$ من العلاقات .

(c) أوجد c_k ; $k = n, n-1, \ldots, 2, 1$ من العلاقات

$$\begin{cases} c_n = b_n \\ c_{n-1} = b_{n-1} + \alpha c_n \\ c_{n-2} = b_{n-2} + \alpha c_{n-1} + \beta c_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_2 = b_2 + \alpha c_3 + \beta c_4 \\ c_1 = b_1 + \alpha c_2 + \beta c_3 \end{cases} \tag{11}$$

لاحظ أن $c_{k+1} = \partial b_k / \partial \alpha$ عندما $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

(d) احسب التصحيحات $\delta \alpha_0$ و $\delta \beta_0$ لـ α_0 و β_0 من المعادلتين

$$\begin{cases} c_2\, \delta\alpha_0 + c_3\, \delta\beta_0 = -b_1(\alpha_0 \beta_0) \\ c_1\, \delta\alpha_0 + c_2\, \delta\beta_0 = -b_0(\alpha_0,\beta_0) \end{cases} \tag{12}$$

ونأخذ التقريب الأول (α_1 , β_1) لـ (α , β) من العلاقتين

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \delta\alpha_0 \qquad \beta_1 = \beta_0 + \delta\beta_0$$

(e) خذ (α_1 , β_1) على أنها (α_0 , β_0) وكرر الخطوات بدءاً من (a)
إلى (d) حتى يظهر التقارب الذي منه نحصل على (α , β)

(f) إن جذري $p(x) = 0$ الموافقين لـ $x^2 - \alpha x - \beta$ هما

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}) \qquad x_2 = \tfrac{1}{2}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}) \tag{13}$$

ملاحظة . إن هذه الطريقة المذكورة في 307 والتي تسمى طريقة نيوتن - بيرستو مفيدة عند حساب الجذور العقدية لمعادلة كثيرات الحدود . إلا أن ضعفها يكمن في صعوبة اقتراح التقريب الصفري المناسب (α_0 , β_0) الذي يفضي إلى التقارب .

308. جُمل المعادلات اللاخطية طريقة نيوتن

لتكن لدينا جملة المعادلات

$$\left\{\begin{array}{l} f_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2 (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \\ f_n (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

ولنفرض أن $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ هو التقريب الصفري للحل (حل تقريبي للمعادلات (1)) . تتلخص **طريقة نيوتن** في البحث عن تصحيحات

لمركبات الحل التقريبي (التقريب الصفري) لكي يصبح هذا الحل $h_1, h_2, \ldots, h_n$ أكثر اقتراباً من الحل المضبوط ، وهكذا يكون التقريب الأول الأفضل بالشكل

$$(x_{11} , x_{21} , \ldots , x_{n1})$$

حيث $x_{11} = x_{10} + h_1 \ , \ x_{21} = x_{20} + h_2 \ , \ \ldots \ , \ x_{n1} = x_{n0} + h_n$

أما $h_1, h_2, \ldots, h_n$ فيتم إيجادها من حل جملة المعادلات الخطية

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - f_{10} \\ - f_{20} \\ \\ - f_{n0} \end{pmatrix}$$

حيث نحسب قيمة المصفوفة المربعة عند $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$. أما عمود الطرف الأيمن فهو قيم التوابع $f_1, f_2, \ldots, f_n$ عند $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$.

بعد الحصول على $x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}$ نعيد كل العمليات المذكورة لإجراء تصحيح آخر على التقريب الأول فنحصل على التقريب الثاني وهكذا . . . .

الاستكمال والتقريب

309 . تمهيد

هناك طريقتان لتقريب التوابع : (a) تبديل التوابع المعقدة بتوابع أبسط . (b) استكمال التوابع بجداول . ومن أسهل التوابع المستخدمة لتقريب التوابع

المعقدة هي كثيرات الحدود ، التوابع المثلثية ، التوابع الأسية ، التوابع الكسرية . وغالباً ما نستخدم تقريب كثيرات الحدود في الحاسبات .

310. شكل لاغرانج : كثير الحدود المستكمل

ليكن $f(x)$ تابعاً حقيقياً و $f(x_i) = f_i$ من أجل $i = 0, 1, \dots, n$. ولنفرض أن النقط (x_i, f_i) مختلفة . فإنه يمكن تقريب $f(x)$ بكثير حدود من الدرجة n

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{1}$$

نجعله يمر من النقط (x_i, f_i) . ويتم تعيين الثوابت a_i من الجملة الخطية

$$\begin{cases} a_n {x_0}^n + a_{n-1} {x_0}^{n-1} + \cdots + a_0 = f_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n {x_n}^n + a_{n-1} {x_n}^{n-1} + \cdots + a_0 = f_n \end{cases} \tag{2}$$

ويمكن كتابة كثير الحدود المستكمل بالشكل

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f_k \qquad \text{(شكل لاغرانج)} \tag{3}$$

حيث

$$L_k(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)} \tag{4}$$

ويمكن التحقق أن الشكل (3) مطابق لـ (1) .

311. خطأ كثير الحدود المستكمِل

بما أنه يوجد عدد كبير من التوابع التي تمر من n نقطة (x_i, f_i) حيث $f_i = f(x_i)$ ، فإن معلوماتنا عن الخطأ المرتكب في تقدير قيمة التابع عند النقط غير المُجَدْوَلة ، قليلة جداً ، ما لم نعلم بعض المعلومات عن $f(x)$.

نظرية ليكن $f(x)$ تابعاً مستمراً مع مشتقاته حتى المرتبة $n + 1$ في النقط المستكمِلة . ننشيء كثير حدود $p(x)$ يمر من $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ إذا كانت x في المجال I ، فإن الخطأ E هو

$$E \equiv f(x) - p(x) = \frac{\psi(x) f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{5}$$

حيث

$$\psi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

و ξ في المجال I .

312. الاستكمال الخطي

عندما $n = 1$ ويكون لدينا نقطتان $(x_0, f_0), (x_1, f_1)$ تأخذ المعادلة (3) الشكل

$$p(x) = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 \tag{6}$$

حيث

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \tag{7}$$

والمعادلة (6) هي الشكل العادي **للاستكمال الخطي** ، ويكون

$$(8)\quad p(x) = \frac{1}{x_1 - x_0}\begin{vmatrix} f_0 & x_0 - x \\ f_1 & x_1 - x \end{vmatrix} = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

أما الخطأ E فهو

$$(9)\qquad E \equiv f(x) - p(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)f''(\xi)}{2!}$$

حيث $x_0 \leqq \xi \leqq x_1$. إذا كان $|f''(x)| < M$ حيث M ثابت في المجال $x_0 < x < x_1$ ، فإن الخطأ الأعظمي في نقطة x بين x_0 و x_1 هو $(x_1 - x_0)^2 M/8$

313. الاستكمال التربيعي

عندما $n = 2$ لدينا

$$(10)\qquad p(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2$$

حيث

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$(11)\qquad L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

أما الخطأ فهو

$$(12)\qquad E \equiv f(x) - p(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f^{(3)}(\xi)}{3!}$$

حيث $x_0 \leqq \xi \leqq x_2$

المفاضلة والمكاملة العددية

314. تمهيد

تُستخدم كثيرات الحدود المستكملة عادة من أجل حساب قيم التوابع عند النقط الواقعة بين النقط المُجَدْوَلة (المعطاة) . إلا أن كثيرات الحدود هذه تستخدم أيضاً في تسهيل إجراء الحسابات على تلك التوابع .

315. المفاضلة العددية

لتكن لدينا مجموعة القيم (x_i, f_i) حيث $i = 0, 1, \dots, n$، من أجل تابع $f(x)$ ، وليكن $p(x)$ كثير الحدود المستكمل المار من هذه النقط . إن المشتق $p'_{\bullet}(x)$ هو تقريب للمشتق $f'(x)$. ولما كانت معلوماتنا عن الخطأ قليلة جداً فمن المُمكن أن يختلف ميل $p(x)$ عن ميل $f(x)$ بمقدار كبير بين النقط المعطاة ، وهذا يعني أنه لا يمكن التوصل الى دقة كبيرة عند المفاضلة العددية . ليكن I مجالاً يحوي النقط $x_0, x_1, \dots, x_n$. فإذا كان $f(x)$ مستمراً مع مشتقاته حتى المرتبة $n + 2$ في المجال I فإن الخطأ في $p'(x)$ عند x_i هو

$$f'(x_i) - p'(x_i) = \frac{\psi'(x_i) f^{(n+1)}(\xi_i)}{(n+1)!} \tag{1}$$

حيث ξ في I وكذلك

$$\psi'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j) \tag{2}$$

لتكن x_i موضوعة على مسافات متساوية فيما بينها ولتكن h المسافة بين نقطتين متجاورتين . ولنفرض أن $s = (x - x_0)/h$.

عندئذٍ نجد من **صيغة نيوتن للفرق التقدمي** (انظر 330) أن :

$$(3)\quad hf'(x) \approx \frac{dp}{ds} = \Delta f_0 + \frac{(2s-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{d}{ds}\binom{s}{n}\Delta^n f_0$$

الحالة $n = 1$. إذا كان $s = 0$ و $x = x_0$ و $n = 1$ عندئذٍ

$$(4)\quad f'(x_0) \approx \frac{\Delta f_0}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h}$$

إن الطرف الأيمن في (4) هو ميل الوتر الواصل بين (x_0, f_0) و (x_1, f_1) وهو يمثل $f'(x_0)$ التقريبي . أما الخطأ المرتكب E في تقريب $f'(x_0)$ فهو $E = -(h/2)\, f''(\xi)$ حيث $x_0 \leqq \xi \leqq x_1$.

الحالة $n = 2$. إذا كان $s = 0$ و $x = x_0$ و $n = 2$ فإن

$$(5)\quad f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2)$$

والطرف الأيمن في (5) هو ميل القطع المكافىء المار بالنقط $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2)$ وهو تقريب $f'(x_0)$ بخطأ E ، حيث

$$E = (h^2/3)\, f'''(\xi)\ ,\ x_0 \leqq \xi \leqq x_2$$

316. المشتق من المرتبة الثانية

يمكن ايجاد المشتقات من مراتب أعلى للتابع $f(x)$ بصورة مشابهة ، وهكذا فالمشتق من المرتبة الثانية هو

$$(6)\quad f''(x_0) \approx \frac{\Delta^2 f_0}{h^2} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}$$

بخطأ $E = -h f'''(\xi)$.

317. صيغ أخرى للمفاضلة

يمكن كتابة صيغ للمفاضلة أكثر دقة من تلك التي وردت في 315 وذلك اعتماداً على الفروق المركزية ، شريطة أن نتمكن من إيجاد قيم $f(x)$ في طرفي x_0 :

$$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \qquad E = \frac{-h^2}{6} f'''(\xi) \tag{7}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} \qquad E = \frac{-h^2}{12} f^{iv}(\xi) \tag{8}$$

318. المشتقات في النقط المُجَدْوَلة (المعطاة)

يمكن إعطاء صيغ للمشتقات f_i' وذلك باستخدام صيغ لاغرانج للاستكمال .

لدينا هنا

$$f_0 = f(x_0) , \qquad f_{-1} = f(x_0 - h) , \qquad f_{-2} = f(x_0 - 2h)$$

$$f_1 = f(x_0 + h) , \qquad f_2 = f(x_0 + 2h)$$

كما أن كل ξ تقع بين القيمتين العظمى والصغرى للفاصلتين قيد الدرس

صيغة النقط الثلاث

$$f'_{-1} = \frac{1}{2h}(-3f_{-1} + 4f_0 - f_1) + \frac{h^2}{3} f'''(\xi)$$

$$f'_0 = \frac{1}{2h}(-f_{-1} + f_1) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi) \tag{9}$$

$$f'_1 = \frac{1}{2h}(f_{-1} - 4f_0 + 3f_1) + \frac{h^2}{3} f'''(\xi)$$

صيغة النقط الخمس

$$f'_{-2} = \frac{1}{12h}(-25f_{-2} + 48f_{-1} - 36f_0 + 16f_1 - 3f_2) + \frac{h^4}{5}f^{v}(\xi)$$

$$f'_{-1} = \frac{1}{12h}(-3f_{-2} - 10f_{-1} + 18f_0 - 6f_1 + f_2) - \frac{h^4}{20}f^{v}(\xi)$$

$$(10)\quad f'_0 = \frac{1}{12h}(f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2) + \frac{h^4}{30}f^{v}(\xi)$$

$$f'_1 = \frac{1}{12h}(-f_{-2} + 6f_{-1} - 18f_0 + 10f_1 + 3f_2) - \frac{h^4}{20}f^{v}(\xi)$$

$$f'_2 = \frac{1}{12h}(3f_{-2} - 16f_{-1} + 36f_0 - 48f_1 + 25f_2) + \frac{h^4}{5}f^{v}(\xi)$$

319. المكاملة العددية

إن احدى الطرائق المستخدمة لحساب

$$(1)\qquad I = \int_a^b f(x)\, dx$$

هي تقريب $f(x)$ بواسطة كثير حدود $p(x)$ ثم مكاملة $p(x)$ للحصول على قيمة تقريبية للتكامل I .

ليكن $(i = 0, 1, \ldots, n)$ ، $f(x_i) \equiv f_i$، حيث x_i نقط من المجال $[a,b]$ ، $x_0 = a,\ x_n = b$. نفرض أيضاً أن $p(x)$ هو كثير الحدود من الدرجة n المستكمل والمار من النقط $(x_i, f_i), (i = 0, 1, \ldots, n)$. فإذا كاملنا كثير الحدود $p(x)$ بدلاً من $f(x)$ نكون قد ارتكبنا خطأً مقداره E

$$(2)\qquad E = \int_a^b [f(x) - p(x)]\, dx = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\int_a^b \psi(x)\, dx$$

حيث $a \leqq \eta \leqq b$ و $\psi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

هو تابع لا يغير إشارته في المجال $[a,b]$.

لتكن $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقطاً على المجال $[a,b]$ والبعد بين كل نقطتين يساوي $s = (x - x_0)/h$.

لنفرض أن $P(x)$ هو كثير حدود نيوتن للفرق التقدمي الذي يستكمل التابع $f(x)$ (انظر 330) ، فإن

$$I_1 \equiv \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx h \int_0^1 P(s)\,ds \tag{3}$$

إن الحالات المختلفة لـ n تعطي تقريبات مختلفة للتكامل .

الحالة $n = 0$. إذا كان $n = 0$ فإن $I_1 \approx h f_0 \equiv R_1$ ونحصل على ما نسميه **قاعدة المستطيل للتقريب** . ويكون الخطأ المرتكب باستخدام هذا التقريب هو $h^2 f'(\eta_0)/2$ ، حيث $x_0 < \eta_0 < x_1$. فإذا كان

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ \dots,\ x_N = a + Nh = b$$

وطبقنا قاعدة المستطيل على كل مجال جزئي واقع بين نقطتي تقسيم ، لحصلنا على

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(f_0 + f_1 + \cdots + f_{N-1}) \equiv R_N \tag{4}$$

ويكون الخطأ المرتكب R_N هو $(b - a)(h/2) f'(\eta)$ ، حيث $a < \eta < b$.

الحالة $n = 1$. إذا كان $n = 1$ فإن

$$I_1 \approx (h/2)(f_0 + f_1) \equiv T_1$$

حيث T_1 هي مساحة شبه المنحرف الواقع تحت $f(x)$ وضلعه المائل من $(x_0, f(x_0))$ إلى $(x_1, f(x_1))$. ويكون الخطأ في حساب T_1 مساوياً $-(h^3/12)\, f''(\eta_0)$ حيث $x_0 < \eta_0 < x_1$.

فإذا طبقنا التقريب T_1 من أجل (x_i, x_{i+1}) ومن a إلى b لحصلنا على

$$(5)\quad \int_a^b f(x)\, dx \approx h\left[\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_{N-1} + \frac{1}{2}f_N\right] \equiv T_N$$

ونسمي هذا النوع من التقريب **قاعدة شبه المنحرف** .

أما الخطأ T_N فهو $[-(b-a)/12]\, h^2 f''(\eta)$

حيث $a < \eta < b$.

يمكن الحصول على تقريب أفضل من T_N للتكامل I نسميه T_{2N} وذلك من العلاقة

$$(6)\quad T_{2N} = \frac{1}{2}T_N + \frac{h}{2}\left[f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{2N-1}{2}h\right)\right]$$

320. قاعدة سيمبسون

باستخدام كثير الحدود المستكمل التقدمي لنيوتن $P(x)$ (انظر 330) نجد أن

$$(7)\quad I = \int_a^b f(x)\, dx = S_{2N} - \frac{N}{90}h^5 f^{iv}(\eta) \qquad a < \eta < b$$

حيث

$$S_{2N} = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 4f_{2N-1} + f_{2N})$$

وتسمى العبارة التي تعطي S_{2N} قاعدة سيمبسون لحساب القيمة التقريبية للتكامل I باستخدام $2N$ عدداً زوجياً من المجالات الجزئية ذات الأطوال المتساوية ، كل منها يساوي h على طول المجال $[a,b]$ ، كما أن $N = (b - a) / 2h$ أما الخطأ في S_{2N} فيساوي

$$[-(b - a) / 180]\, h^4 f^{(4)}(\eta)$$

حيث $a < \eta < b$. عندما تكون $N = 1$ فإن

$$S_2 = (h / 3)(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

ويكون الخطأ عندئذٍ أصغر مما نتوقع لدى استخدام هذا العدد من النقط ، وهكذا فإن قاعدة سيمبسون تعتبر عموماً القاعدة الأفضل .

321. طريقة غوص (تربيع غوص)

لقد اعتمدت الطرائق السابقة لحساب التكامل على أن الأبعاد بين النقط المأخوذة متساوية .

نفرض الآن أنه يوجد عدد ثابت من النقط ، فإنه يمكن الحصول على صيغ أكثر دقة لحساب التكامل وتأخذ هذه الصيغ الشكل

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) \equiv G \qquad (8)$$

حيث يتم انتقاء x_i و a_i بحيث يمثل التقريب G القيمة المضبوطة للتكامل وذلك من أجل كثيرات الحدود التى درجتها أصغر أو تساوي $2n+1$.

إن استخدام التحويل

$$x = [a + b + (b - a)t] / 2$$

يحول المجال $[a,b]$ إلى $[-1,1]$ و $f(x)$ إلى $F(t)$. وعندئذٍ تصبح المعادلة (8)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} F(t)\,dt \qquad (9)$$

حيث

$$\int_{-1}^{1} F(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} A_i F(t_i) \qquad (10)$$

أما t_i فهي أصفار مجموعة خاصة من كثيرات حدود لوجاندر $P_m(t)$ وتكون جميع الأصفار حقيقية مختلفة وتقع في المجال $[-1, 1]$.

وقد تم حساب t_i و A_i من أجل قيم متعددة لـ n كما في الأمثلة التالية :

m	$P_m(t)$	أصفار $P_m(t)$
1	$P_1(t) = t$	$t_0 = 0$
2	$P_2(t) = (3t^2 - 1)/2$	$t_1 = 1/\sqrt{3} = -t_0$
3	$P_3(t) = (5t^3 - 3t)/2$	$t_2 = \sqrt{3/5} = -t_0,\ t_1 = 0$
4	$P_4(t) = (35t^4 - 30t^2 + 3)/8$	$t_3 = -t_0,\ t_2 = -t_1$
		$t_0 = -0.86113631$
		$t_1 = -0.33998104$

n	t_i	A_i
0	$t_0 = 0.00000000$	$A_0 = 2.00000000$
1	$t_1 = -t_0 = 0.57735027$	$A_1 = A_0 = 1.00000000$
2	$t_1 = 0.00000000$	$A_1 = 0.88888889$
	$t_2 = -t_0 = 0.77459667$	$A_2 = A_0 = 0.55555556$
3	$t_2 = -t_1 = 0.33998104$	$A_2 = A_1 = 0.65214515$
	$t_3 = -t_0 = 0.86113631$	$A_3 = A_0 = 0.34785485$
4	$t_4 = -t_0 = 0.90617985$	$A_1 = A_0 = 0.23692689$
	$t_3 = -t_1 = 0.53846931$	$A_3 = A_1 = 0.47862867$
	$t_2 = 0.00000000$	$A_2 = 0.56888889$

مثال . عندما $n = 1$ فإن

$$\int_{-1}^{1} F(t)\, dt = A_0 F(t_0) + A_1 F(t_1)$$

حيث $A_0 = A_1 = 1$ و $t_1 = -t_0$

$t_1 = 1 / \sqrt{3} = 0.57735027$ وهذه الصيغة صحيحة من أجل جميع كثيرات الحدود $F(t)$ التي درجتها أصغر أو تساوي 3 .

322. الخلاصة

يمكن القول عموماً ان طريقة غوص في المكاملة تعطي دقة أكبر من طريقة سيمبسون ، إضافة إلى أن الجهد المبذول في طريقة سيمبسون يساوي ضعف الجهد المستخدم في طريقة غوص . على الرغم من ذلك فإن بعض الصعوبات تعترض طريقة غوص عندما يكون $F(t)$ معطى بصورة تجريبية .

حساب الفروق المنتهية

323. مجموعة الرموز

نفرض أن الأبعاد بين النقط المستكملة x_i متساوية أي أن

$$x_i - x_{i-1} = h > 0$$

من أجل جميع قيم i :

$$i = -k, \ -k+1, \ \ldots, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ k$$

نفرض أن $f(x)$ هو تابع حقيقي لـ x وحيد القيمة ، وأن

$$f(x_i) \equiv f_i \qquad f(x_i + h/2) = f_{i+1/2} \qquad f(x_n + sh) \equiv f_{n+S} \ ,$$

نستخدم أيضاً الرموز $\Delta, \nabla, \delta, \mu, E$ لتعبر عن **مؤثرات** تحوِّل $f(x)$ إلى توابع مرتبطة بـ $f(x)$ وفق التعاريف التالية :

(المؤثر الفرقي التقدمي Δ) $\quad \Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

(المؤثر الفرقي التراجعي ∇) $\quad \nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$

(المؤثر الفرقي المركزي δ) $\quad \delta f(x) = f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)$

(مؤثر التوسيط μ) $\quad \mu f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x+\frac{h}{2}\right) + f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right]$

(مؤثر الإزاحة E) $\quad Ef(x) = f(x+h)$

324. أمثال (معاملات) ثنائي الحد

تعرّف تابع ثنائي الحد $\binom{x}{r}$ من أجل أي عدد حقيقي x كما يلي

(r صحيح موجب) $\quad \binom{x}{r} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!}$

$\binom{x}{0} = 1 \qquad \binom{x}{r} = 0$ (r صحيح سالب)

$\binom{0}{0} = 1 \qquad \binom{x}{r} = 0 \quad (r \neq 0 \ , \ x = 0)$

إذا كان $h = 1$ فإن

$k = 0, 1, \ldots \qquad \Delta^k\binom{x}{r} = \binom{x}{r-k}$ و $\Delta\binom{x}{r} = \binom{x}{r-1}$

325. العلاقات بين المؤثرات

نعرّف قوى المؤثرات E, ∇, Δ كما يلي:

من أجل أي k $\qquad E^k f(x) = f(x + kh)$

$$\Delta^k f(x) = \Delta[\Delta^{k-1} f(x)] \quad \text{و} \quad \nabla^k f(x) = \nabla[\nabla^{k-1} f(x)], \quad k = 1, 2, \ldots .$$

امثلة

$$\Delta^0 f(x) = f(x). \quad \Delta f(x) = (E - 1) f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x + h) - \Delta f(x) = f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)$$

k أي عدد صحيح $\qquad E^k f(x) = (1 + \Delta)^k f(x)$

$$\nabla^k f(x) = f(x) - \binom{k}{1} f(x - h) + \binom{k}{2} f(x - 2h) - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} f(x - kh)$$

$$\nabla^0 f(x) = f(x) \qquad \nabla f(x) = (1 - E^{-1}) f(x)$$

$$\nabla^2 f(x) = \nabla f(x) - \nabla f(x - h) = f(x) - 2f(x - h) + f(x - 2h)$$

326. الفروق التقدمية

تبدأ صيغ الفرق التقدمي بمجموعة من الأعداد $f_0, f_1, \ldots, f_i, \ldots$ وتكون الفروق التقدمية

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0\ , \ \Delta f_1 = f_2 - f_1, \ \ldots;$$

$$\Delta^2 = \Delta f_1 - \Delta f_0\ , \ \Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1, \ \ldots, \ \ldots$$

كما يبين الجدول 1-15 .

الجدول 1-15 . الفروق التقدمية

x_{-4}	f_{-4}				
		Δf_{-4}			
x_{-3}	f_{-3}		$\Delta^2 f_{-4}$		
		Δf_{-3}		$\Delta^3 f_{-4}$	
x_{-2}	f_{-2}		$\Delta^2 f_{-3}$		$\Delta^4 f_{-4}$
		Δf_{-2}		$\Delta^3 f_{-3}$	
x_{-1}	f_{-1}		$\Delta^2 f_{-2}$		$\Delta^4 f_{-3}$
		Δf_{-1}		$\Delta^3 f_{-2}$	
x_0	f_0		$\Delta^2 f_{-1}$		$\Delta^4 f_{-2}$
		Δf_0		$\Delta^3 f_{-1}$	
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		$\Delta^4 f_{-1}$
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$	
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$	
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		
		Δf_3			
x_4	f_4				

327. رمز الفرق المركزي

تبدأ صيغ الفرق المركزي بمجموعة أعداد هي $\ldots, f_{-i}, f_{-i+1}, \ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots, f_i, \ldots$ وتُمثّل الفروق المركزية بالعبارات $\delta^m f_j$. ويأخذ الدليل j (الذي ليس بالضرورة عدداً صحيحاً) قيمة توافق المنتصف بين دليلي الكميتين اللتين نعبر عن الفرق بينهما . وهكذا نجد من التعريف أن

$$\delta f_j = f_{j+1/2} - f_{j-1/2}, \quad \delta^n f_j = \delta^{n-1} f_{j+1/2} - \delta^{n-1} f_{j-1/2}, \quad n > 1$$
$$\mu\delta^n f_j = \tfrac{1}{2}(\delta^n f_{j+1/2} + \delta^n f_{j-1/2})$$

أما العلاقة بين رَمْزَي الفرق المركزي والفرق التقدمي فهي

$$\delta^n f_j = \Delta^n f_{j-n/2}; \ \mu\delta^n f_j = \tfrac{1}{2}[\Delta^n f_{j-(n+1)/2} + \Delta^n f_{j-(n-1)/2}]$$

ويمكن عرض هذه الفروق في الجدول 15.2 .

الجدول 15.2

x_{-4}	f_{-4}				
		$\delta f_{-7/2}$			
x_{-3}	f_{-3}		$\delta^2 f_{-3}$		
		$\delta f_{-5/2}$		$\delta^3 f_{-5/2}$	
x_{-2}	f_{-2}		$\delta^2 f_{-2}$		$\delta^4 f_{-2}$
		$\delta f_{-3/2}$		$\delta^3 f_{-3/2}$	
x_{-1}	f_{-1}		$\delta^2 f_{-1}$		$\delta^4 f_{-1}$
		$\delta f_{-1/2}$		$\delta^3 f_{-1/2}$	
x_0	f_0		$\delta^2 f_0$		$\delta^4 f_0$
		$\delta f_{1/2}$		$\delta^3 f_{1/2}$	
x_1	f_1		$\delta^2 f_1$		$\delta^4 f_1$
		$\delta f_{3/2}$		$\delta^3 f_{3/2}$	
x_2	f_2		$\delta^2 f_2$		$\delta^4 f_2$
		$\delta f_{5/2}$		$\delta^3 f_{5/2}$	
x_3	f_3		$\delta^2 f_3$		
		$\delta f_{7/2}$			
x_4	f_4				

أمثلة

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0 \qquad \Delta f_{-1} = f_0 - f_{-1}$$
$$\delta f_{1/2} = \Delta f_0 \qquad \delta^2 f_1 = \Delta^2 f_0 \qquad \delta^3 f_{3/2} = \Delta^3 f_0$$
$$\mu f_j = \tfrac{1}{2}(f_{j-1/2} + f_{j+1/2})$$
$$\mu\delta f_0 = \tfrac{1}{2}(\Delta f_{-1} + \Delta f_0) \qquad \delta^2 f_0 = \Delta^2 f_{-1}$$
$$\mu\delta^3 f_0 = \tfrac{1}{2}(\Delta^3 f_{-2} + \Delta^3 f_{-1}) \qquad \delta^4 f_0 = \Delta^4 f_{-2}$$
$$\delta^m f_{n/2} = \Delta^m f_{(n-m)/2}$$

عندما يكون العددان الصحيحان n و m زوجيين معاً أو فرديين معاً

.328

إذا كان $f(x) \equiv f$ فإن $f(x_i) \equiv f_i$ من أجل $k = 1, 2, \ldots$ كما أن

$$\delta^k f(x) = \delta[\delta^{k-1} f(x)] = \delta^{k-1} f(x + \tfrac{1}{2}h) - \delta^{k-1} f(x - \tfrac{1}{2}h).$$

امثلة

$$\delta^0 f(x) = f(x) \qquad \delta^{2k} f(x_i) = \Delta^{2k} f(x_{i-k}) \qquad k = 0, 1, \ldots$$
$$\delta^2 f(x) = \delta[\delta f(x)] = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$$

329. الاستكمال في جدول

نفرض أن قيم التابع $f(x)$ معطاة على جانبي x_0 ، وأن النقط x_i مرتّبة بحيث $x_i > x_j$ عندما $i > j$ و $x_i - x_{i-1} = h > 0$ من أجل كل i . نفرض أيضاً أن $s = (x - x_0) / h$ وأن النقط المُجَدْوَلة هي $x_s = x_0 + s\,h$

حيث $s = 0, \pm 1, \ldots, \pm k$. عندئذٍ $f(x_s) = f(x_0 + s\,h) \equiv f_s$

حيث $s = 0, \pm 1, \ldots, \pm k$.

ويعطي تطبيق مؤثر الفرق التقدمي على f_s ما يلي

$$\Delta f_s = f_{s+1} - f_s \ , \ s = 0, \pm 1, \ldots, \pm k$$

ويتم الحصول على الفروق ذات المراتب الأعلى من

$$\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x) = (E-1)^k f(x)$$

أما الفروق المتقدمة ابتداءً من x_0 فهي

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0, \ \Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0, \ldots$$
$$\Delta^k f_0 = \Delta^{k-1} f_1 - \Delta^{k-1} f_0 = f_k - \binom{k}{1} f_{k-1} + \binom{k}{2} f_{k-2} - \cdots + (-1)^k f_0$$

بينما تكون الفروق التراجعية ابتداءً من x_0 هي

$$\Delta f_{-1} = f_0 - f_{-1}, \ \Delta^2 f_{-2} = \Delta f_{-1} - \Delta f_{-2} = f_0 - 2f_{-1} + f_{-2}, \ldots$$
$$\Delta^k f_{-k} = \Delta^{k-1} f_{-k+1} - \Delta^{k-1} f_{-k} = f_0 - \binom{k}{1} f_{-1} + \binom{k}{2} f_{-2} - \cdots + (-1)^k f_{-k}$$

وتستخدم جداول الفروق للتأكد من مَلاسة التابع (عدم وجود قفزات شاذة) ، ولكشف الأخطاء في قيم التابع ولتقدير درجة كثير الحدود التي يمكن أن تستخدم بهدف الاستكمال .

330. كثير حدود نيوتن للفرق التقدمي المستكمل

هو كثير حدود من الدرجة n والذي يستكمل النقط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ يُكتب بالصيغة التالية

$$P_n(s) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_0 + \binom{s}{2} \Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{s}{n} \Delta^n f_0 \qquad (1)$$

التي نسميها صيغة نيوتن للفرق التقدمي .

ويمكن توليد المعادلة (1) من الشكل الارتدادي التالي ؛

$$P_k(s) = P_{k-1}(s) + \binom{s}{k} \Delta^k f_0 \qquad k = 1, 2, \ldots, n \qquad (2)$$

حيث $P_0 = f_0$ و $\Delta^k f_0$ هي الفروق التقدمية ابتداءً من $x = x_0$.

أمثلة . كثير الحدود الخطي الذي يستكمل x_0 و x_1 هو

$$P_1 = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_0$$

كثير الحدود من الدرجة الثانية الذي يستكمل x_0, x_1, x_2 هو

$$P_2 = P_1 + \binom{s}{2} \Delta^2 f_0 = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_0 + \binom{s}{2} \Delta^2 f_0$$

331. حساب الخطأ

إن الخطأ E لـ $P_n(s)$ في (1) هو

$$(3)\quad E = f(x) - P_n(s) = \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{n+1}(\xi) \qquad x_0 < \xi < x_n$$

وتستخدم الصيغة (1) لاستكمال قيم x التقدمية ابتداءً من x_0 وقُرب بداية مجموعة القيم المُجَدْوَلة ، كما تستخدم هذه الصيغة لاستيفاء مسافة قصيرة قبل x_0 .

332. كثير حدود نيوتن للفرق التراجعي المستكمل

هو كثير الحدود المستكمل من الدرجة n عند $x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0$ ويعطى بالشكل

$$(4)\quad P_n(s) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_{-1} + \binom{s+1}{2} \Delta^2 f_{-2} + \cdots + \binom{s+n-1}{n} \Delta^n f_{-n}$$

أو

$$(4')\quad P_n(s) = f_0 - \binom{-s}{1} \Delta f_{-1} + \binom{-s}{2} \Delta^2 f_{-2} - \cdots + (-1)^n \binom{-s}{n} \Delta^n f_{-n}$$

لأن $\binom{s+k-1}{k} = (-1)^k \binom{-s}{k}.$

هذا ويمكن توليد المعادلة (4) من العلاقة الارتدادية التالية :

$$(5)\quad P_k(s) = P_{k-1}(s) + \binom{s+k-1}{k} \Delta^k f_{-k} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

حيث $P_0 = f_0$ و $\Delta^k f_{-k}$ هي الفروق التراجعية ابتداءً من x_0 .

مثال . إن كثير الحدود الخطي المستكمل لـ x_0, x_{-1} هو

$$P_1(s) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_{-1}$$

بينما يكون كثير الحدود من الدرجة الثانية المستكمل لـ x_0, x_{-1}, x_{-2} هو

$$P_2(s) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_{-1} + \binom{s+1}{2} \Delta^2 f_{-2}$$

أما الخطأ E لـ $P_n(s)$ في (4) فهو

$$(6)\quad E = f(x) - P_n(s) = \binom{s+n}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \qquad x_{-k} < \xi < x_0$$

333. مقارنات

إن لصيغتي نيوتن (1) و (4) ميزتان على صيغ لاغرانج هما (a) يمكن زيادة درجة الاستكمال بإضافة حدود إضافية كما هو مبين في (2) و (5) . (b) يمكن الحصول على تقييم الخطأ باختبار الفروق الأولى المهملة .

ويمكن استخدام (4) لاستكمال قيمة x الواقعة قبل x_0 قرب آخر مجموعة القيم المُجَدْوَلة ، كذلك نستخدم (4) لاستيفاء قيم x التي تلي x_0 وعلى مسافة قصيرة منها .

334. صيغ غوص الفرقية

إذا كانت المعطيات المتوفرة هي قيم على جانبي نقطة معينة فإنه يمكن استخدام كثيرات الحدود المستكملة التالية :

$$(1)\quad P(s) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_{-1} + \binom{s+1}{3}\Delta^3 f_{-1} + \binom{s+1}{4}\Delta^4 f_{-2} + \binom{s+2}{5}\Delta^5 f_{-2} + \cdots$$

(صيغة غوص للفرق التقدمي)

$$(2)\quad P(s) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_{-1} + \binom{s+1}{2}\Delta^2 f_{-1} + \binom{s+1}{3}\Delta^3 f_{-2} + \binom{s+2}{4}\Delta^4 f_{-2} + \binom{s+2}{5}\Delta^5 f_{-3} + \cdots$$

(صيغة غوص للفرق التراجعي)

في الحالة التي يكون فيها الحد الأخير المستخدم في (1) و (2) متضمناً فرقاً زوجياً ، مثل $\Delta^{2k} f_{-k}$ فإن (1) و (2) تَستكملان عند $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k$.

ويمكن دوماً الاستعاضة عن صيغة غوص بصيغة مكافئة هي صيغة ستيرلينغ أو بسل نظراً لأن الأمثال مُجَدْوَلة بشكل جيد .

335. صيغتا ستيرلينغ وبِسِل

عندما يتم إجراء الاستكمالات من أجل قيم x في الجوار القريب لنقطة داخلية x_0 ، كأن يكون الاستكمال بين

$$x_0 - \frac{1}{2} \text{ و } x_0 + \frac{1}{2} h$$

عندئذٍ من المناسب استخدام صيغة ستيرلينغ

$$(1)\ f_s \approx f_0 + \binom{s}{1}\mu\delta f_0 + \frac{s}{2}\binom{s}{1}\delta^2 f_0 + \binom{s+1}{3}\mu\delta^3 f_0 + \frac{s}{4}\binom{s+1}{3}\delta^4 f_0 + \cdots$$

صيغة بِسِل . عندما يراد اجراء الاستكمال بين x_0 و x_1 فمن المناسب استخدام صيغة بِسِل

$$f_s \approx \mu f_{1/2} + \left(s - \frac{1}{2}\right)\delta f_{1/2} + \binom{s}{2}\mu\delta^2 f_{1/2} + \frac{s - \frac{1}{2}}{3}\binom{s}{2}\delta^3 f_{1/2} + \binom{s+1}{4}\mu\delta^4 f_{1/2} + \frac{s - \frac{1}{2}}{5}\binom{s+1}{4}\delta^5 f_{1/2} + \cdots$$

16. المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية العادية

336. تعاريف أساسية

المعادلة التفاضلية هي كل معادلة تحوي مشتقات أو تفاضلات لتابع أو عدة توابع . **مرتبة المعادلة التفاضلية** هي مرتبة أعلى مشتق يرد في المعادلة . **درجة المعادلة التفاضلية** هي أكبر قوة لأعلى مشتق يظهر في المعادلة وذلك بعد تحويل المعادلة إلى شكل كسري أو صحيح في قوى المشتقات الظاهرة في المعادلة .

نأخذ المعادلة التفاضلية العادية من المرتبة n

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

حيث y تابع مجهول للمتغير x .

حل (تكامل) المعادلة *(1)* هو تابع $y = \phi(x)$ يحوّل المعادلة (1) إلى مطابقة من أجل جميع قيم x وذلك بعد وضع

$\phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)$ عوضاً عن $y, y', \ldots, y^{(n)}$ في (1).

ملاحظة . إذا تحوّلت (1) إلى مطابقة في مجال I قلنا إن $y = \phi(x)$ هو حل في ذلك المجال .

الحل العام . للمعادلة (1) هو حل يحتوي على n من الثوابت الاختيارية $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ونكتبه بالشكل

$$y = \phi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \quad (2)$$

فإذا اشتققنا (2) n مرة بالنسبة لـ x وحذفنا الثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_n$ فإننا نحصل على (1) ، ونسمي هذه العملية **تشكيل** المعادلة التفاضلية الموافقة .

الحل الخاص . هو أي حل للمعادلة (1) نحصل عليه باعطاء الثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_n$ قيماً محددة .

الحل الشاذ . هو الحل الذي لا يمكن الحصول عليه من الحل العام باعطاء قيم محددة للثوابت . انظر 347 .

وتكون المعادلة التفاضلية **قابلة للحل** إذا تمكنا من إعطاء y كتابع ظاهري بالنسبة لـ x أو كتابع ضمني لـ x بالشكل

$$\psi(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$$

مسألة كوشي . هي مسألة إيجاد الحل الخاص المحقق لشرط بدء أو عدة شروط معطاة تمكننا من إيجاد قيم الثوابت الاختيارية التي تجعل الحل محققاً لهذه الشروط .

337. المعادلات من المرتبة الأولى والدرجة الأولى

إذا كان $f(x,y)$ تحليلياً في x و y بجوار (x_0,y_0) فإن للمعادلة

(3) $$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

حلاً $y(x)$ ، حيث $y(x)$ تحليلي بجوار x_0 و $y(x_0) = y_0$.

طرائق الحل

338. تمهيد

يمكن الانتقال من المعادلة (3) إلى الشكل المكافىء

(4) $$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

أي

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

حيث M و N تابعان لـ x و y .

339. طريقة فصل المتغيرات

إذا كان M و N جداء عوامل ، كلٌ منها تابع لـ x فقط أو لـ y فقط ، عندئذٍ تأخذ المعادلة (4) الشكل

(5) $$A(x)\,P(y)\,dx + B(x)\,Q(y)\,dy = 0$$

حيث A و B تابعان لـ x فقط ، P و Q تابعان لـ y فقط . وبفصل المتغيرات في (5) والمكاملة نحصل على الحل العام

(6) $$\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx + \int \frac{Q(y)}{P(y)}\,dy = c$$

حيث c ثابت .

340. المعادلات التامة

يكون المقدار $M\,dx + N\,dy$ تفاضلاً تاماً dU لتابع $U(x,y)$ إذا وفقط إذا كان

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

وتكون العبارة $M\,dx + N\,dy$ في هذه الحالة تامة ، كما أن الحل العام للمعادلة المعطاة هو $U + c = 0$.

مثال . المعادلة $(2x - y)\,dx + (3y^2 - x)\,dy = 0$ تامة ، حيث $M = 2x - y$, $N = 3y^2 - x$. نكامل $M\,dx$ ونعتبر y ثابتاً فنجد

$$\int M\,\partial x = x^2 - yx + f(y) \equiv \varphi(x)$$

حيث $f(y)$ هو تابع مجهول في y (نظراً لأننا اعتبرنا y ثابتاً) . إلا أن $\partial\varphi / \partial y = N$ وهكذا $-x + f'(y) = 3y^2 - x$
وبالتالي $f(y) = y^3$ ، ويكون الحل العام للمعادلة هو

$$x^2 - yx + y^3 + c = 0$$

341. عوامل المكاملة

إذا لم تكن المعادلة (4) تامة ، نبحث عن تابع $\mu(x,y)$ نسميه عامل مُكامَلة بحيث يحوّل المعادلة (4) بعد ضرب طرفيها به إلى معادلة تامة أي

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy \equiv dW \qquad (7)$$

ويتم إيجاد $\mu(x,y)$ من العلاقة

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

في حالات خاصة كأن يكون μ تابعاً لـ x فقط أو لـ y فقط أو تابعاً لعبارة تحوي x, y مثل $x + y$, $x^2 + y^2$ ...

342. المعادلات المتجانسة

نقول إن التابع $f(x, y, ..., t)$ متجانس في المتغيرات $x, y, ..., t$ إذا عوضنا عن x بـ λx وعن y بـ λy ... في التابع وتحققت العلاقة

$$f(\lambda x, \lambda y, ..., \lambda t) = \lambda^n f(x, y, ..., t)$$

ونسمي n مرتبة تجانس f .

إذا كان M و N في (4) متجانسين ولهما مرتبة التجانس نفسها فإن التحويل $y / x = z$. $dy = z\,dx + x\,dz$ يحول المعادلة (4) إلى معادلة منفصلة المتغيرات في z و x ويتم الحل بطريقة الفقرة 339 .

343. المعادلات التي تؤول إلى متجانسة

تؤول المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \tag{8}$$

إلى معادلة متجانسة باستخدام التحويلين $x = x_0 + u$, $y = y_0 + v$

حيث (x_0, y_0) هو حل المعادلتين

$$a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0 \ , \ a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 = 0$$

وتصبح المعادلة (8)

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v} \tag{9}$$

التي يمكن أن تُحل كما في 342 .

344. المعادلات الخطية

يُعطى حل المعادلة الخطية

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x) \tag{10}$$

بالشكل

$$y \exp\left[-\int P\, dx\right] = \int Q \exp\left[\int P\, dx\right] dx + c \tag{11}$$

فإذا استطعنا إيجاد حلين خاصين y_1 , y_2 للمعادلة (10) فإن الحل العام هو

$$y - y_1 = c\,(y_2 - y_1)$$

مثال . لحل المعادلة $(dy / dx) + (y / x) = x^3$ لدينا

$$\int P\, dx = \ln x \ , \ P(x) = 1 / x \ , Q(x) = x^3$$

$$\exp\left(-\int P\, dx\right) = \frac{1}{x} \ , \ \exp\left(\int P\, dx\right) = x$$

$$y = \frac{1}{x}\left[c + \int x^3 . x\, dx\right] = \frac{1}{x}\left[c + \frac{x^5}{5}\right]$$

345 a. معادلة برنولي

هي المعادلة

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \qquad (12)$$

التي تؤول باستخدام التحويل $z = y^{1-n}$ إلى

$$\frac{dz}{dx} + (1 - n)Pz = (1 - n)Q \qquad (13)$$

وهي معادلة خطية تُحل كما في 344.

345 b. معادلة ريكاتي

وهي المعادلة $y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0$

حيث p, q, r توابع لـ x . لسوء الحظ لا توجد طريقة عامة لحل هذه المعادلة ، إلا من أجل صيغ خاصة لها ومن خلال تحقق بعض الشروط .

إذا عرفنا حلًا خاصاً y_1 لهذه المعادلة فإن استخدام التحويل $y = y_1 + (1/z)$ يحوّل معادلة ريكاتي إلى معادلة خطية تُحل كما في 344 .

346. معادلات المرتبة الأولى ذات الدرجة الأعلى

إن الشكل العام لمعادلات المرتبة الأولى هو

$$F(x,y,p) = 0 \qquad (14)$$

حيث ... $p = dy / dx,\ p^2 = (dy / dx)^2,$. نورد فيما يلي طريقتين للحل :

الطريقة الأولى . إذا أمكن تحليل F أي

$$F = [p - f_1(x,y)][p - f_2(x,y)] \cdots\cdot [p - f_n(x,y)] = 0$$

فإن

$$(15)\quad p - f_1(x,y) = 0 \qquad p - f_2(x,y) = 0, \ldots \qquad p - f_n(x,y) = 0$$

ويتم حل كل معادلة على حدة باستخدام طرائق حل المعادلات من المرتبة الأولى والدرجة الأولى .

مثال . لحل المعادلة $(p - 2x)(p + 2y) = 0$ لدينا

$$p - 2x = 0 \Leftrightarrow y = x^2 + c, \; p + 2y = 0 \Leftrightarrow \ln(c\,y) = -2x$$

الطريقة الثانية . إذا أمكن حل المعادلة (14) بالنسبة لـ y نجد

$$(16)\qquad y = g(x,p)$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x نجد

$$(17)\qquad p = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{dp}{\partial x}$$

وهي معادلة خطية من المرتبة الأولى في p . فإذا كان حل المعادلة (17) هو

$$(18)\qquad G(x,p,c) = 0$$

فإن إيجاد الحل العام للمعادلة الأصلية يتم بحذف p بين (16) و (18) حيث نحصل على

$$(19)\qquad Q(x,y,c) = 0$$

ولا بد من اختبار المعادلة (19) بالمقارنة مع (16) لمعرفة عدم دخول عوامل غريبة .

347. معادلة كليرو

هي المعادلة

$$y = px + f(p) \tag{20}$$

حيث $p = dy / dx$. باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة لـ x نحصل على

$$[x + f'(p)] \frac{dp}{dx} = 0 \tag{21}$$

فإذا كان $d p / d x = 0$ فإن $p = c$ والحل العام هو $y = c x + f (c)$.

نحصل على حلول شاذة لا يمكن الحصول عليها من الحل العام ، ويتم تعيين هذه الحلول من حذف p بين المعادلتين :

$$x + f'(p) = 0 \qquad y = -pf'(p) + f(p) \tag{22}$$

348. معادلة لاغرانج (دالامبير)

وهي المعادلة

$$y = xg(p) + f(p) \qquad g(p) \neq p \tag{23}$$

يتم حل هذه المعادلة باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x ومعاملة p على أنها المتغير المستقل .

349. المعادلات التفاضلية الخطية

الشكل العام للمعادلة الخطية من المرتبة n هو

$$X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = X \tag{A}$$

حيث $X_0 \neq 0$ و X, $X_1, \ldots, X_n$ توابع لـ x فقط أو ثوابت فإذا استخدمنا المؤثر التفاضلي $D \equiv \dfrac{d}{dx}$ لأمكن كتابة المعادلة

$$y'' + x^2 y' - y = e^x$$

بالشكل $(D^2 + x^2 D - 1) y = e^x$ والمعادلة (A) بالشكل المختزل

$$(A') \qquad P(D, x)\, y = X$$

حيث $P(D,x)$ **كثير حدود تفاضلي** بأمثال متغيرة .

فإذا كان التابع X مطابقاً للصفر نحصل على المعادلة التفاضلية المتجانسة الموافقة

$$(B) \qquad P(D,x)\, y = 0$$

فإذا كانت $X_0, X_1, \ldots, X_n$ ثوابتاً نحصل على المعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$(A_H) \qquad P(D)\, y = X$$

والمعادلة المتجانسة الموافقة لها

$$(B_H) \qquad P(D)\, y = 0$$

الاستقلال والارتباط الخطي . نقول إن مجموعة التوابع $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ **مستقلة خطياً** إذا كان تحقّق العلاقة

$$c_1 \varphi_1(x) + \ldots + c_n \varphi_n(x) = 0 \qquad (*)$$

لا يتم إلا إذا كانت الثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_n$ جميعها مساوية للصفر ، فإذا أمكن إيجاد مجموعة من الثوابت ليست جميعها أصفاراً بحيث تتحقق العلاقة (*) قلنا إن مجموعة التوابع **مرتبطة خطياً** .

نظرية . إذا كانت $y_1, y_2, \ldots, y_n$ حلولاً للمعادلة (B) (أو B_H) فإن هذه الحلول تكون مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان $\det W \neq 0$ ، حيث

$$W = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

نظرية . إذا كانت $y_1, y_2, \ldots, y_n$ حلولاً مستقلة خطياً للمعادلة (B) [أو (B_H)] ، فإن الحل العام لهذه المعادلة هو

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots c_n y_n \qquad (C)$$

حيث $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثوابت اختيارية .

نظرية . الحل العام للمعادلة (A) [أو A_H] يعطى بالعلاقة

$$y = y_H + y_p \qquad (D)$$

حيث y_p هو حل خاص للمعادلة ، أما y_H فهو الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة (B) [أو B_H] .

350. المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة

تأخذ المعادلة (A) في هذه الحالة الشكل

$$\text{(I)} \quad a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y \equiv P(D)y = X$$

حيث $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ثوابت و X تابع لـ x .

351. الحالة $X = 0$

لتكن $m_1, m_2, \ldots, m_n$ جذور **المعادلة المميزة**

$$(G) \qquad a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n \equiv P(m) = 0$$

ولنفرض أن هذه الجذور مختلفة فإن

$$(F) \qquad y = c_1 e^{m_1 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

هو الحل العام للمعادلة

$$(E) \qquad P(D) y = 0$$

أما إذا كانت بعض جذور (G) مضاعفة فإنه يمكن تحويل (G) الى الشكل

$$(m - m_1)^{\alpha} (m - m_2)^{\beta} \cdots (m - m_r)^{\rho} = 0$$

وعندئذٍ يُعطى الحل العام للمعادلة (E) بالشكل

$$(H) \quad y = (a_1 + a_2 x + \cdots + a_{\alpha} x^{\alpha-1}) e^{m_1 x} + \cdots + (p_1 + p_2 x + \cdots + p_{\rho} x^{\rho-1}) e^{m_r x}$$

حيث $\ell_1, \ell_2, \ldots$ و $p_1, p_2, \ldots$ ثوابت اختيارية .

إذا كان $m_1 = a + i\, b$ و $m_2 = a - i\, b$ جذرين مترافقين للمعادلة المميزة (G) فإن من المناسب أن نكتب

$$c_1\, e^{m_2 x} + c_2\, e^{m_2 x}$$

بالشكل

$$e^{a\,x} (\, A \cos b\,x + B \sin b\,x \,)$$

حيث A , B ثابتان اختياريان .

أما إذا كان الجذران العقديان m_1 , m_2 مضاعفين مرتين فإن من المناسب أن نكتب

$$(c_1 + c_2 x) e^{m_1 x} + (k_1 + k_2 x) e^{m_2 x}$$

بالشكل

$$e^{ax} \left[(A_1 + B_1 x) \cos b x + (A_2 + B_2 x) \sin b x \right]$$

وهكذا . . . .

352. الحالة $X \neq 0$

يعطى الحل العام في هذه الحالة بالشكل

$$y = y_H + y_p$$

حيث y_H هو الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة (انظر 351) .

ويتم البحث عن y_p بطرائق متعددة نتعرض لاثنتين منها في 353 و 354 .

نظرية . إذا كان y_p حلاً خاصاً للمعادلة $P(D)\, y = X$ وكان z_p حلاً خاصاً للمعادلة $P(D)\, y = Z$ حيث X و Z تابعان لـ X فإن $y_p + z_p$ هو حل خاص للمعادلة $P(D) = X + Z$

353. طريقة الأمثال غير المعينة

يتم إيجاد الحل الخاص y_p للمعادلة (I) بكتابة شكل لحل خاص نقترحه على غرار التابع X (الطرف الثاني للمعادلة) ، وهذا الحل يتضمن ثوابت يتم تعيينها باشتقاق الحل الخاص المقترح والتعويض في المعادلة وإجراء عملية مطابقة . نورد فيما

يلي جدولاً نبين فيه شكل الطرف الثاني وشكل الحل الخاص المقترح . نفرض هنا أن $C_m(x), B_m(x), A_m(x)$ كثيرات حدود من الدرجة m .

جدول الحل الخاص المقترح

شكل الحل الخاص المقترح	الشروط	شكل الطرف X
$B_m(x)$	الصفر ليس جذراً للمعادلة المميزة .	I. $A_m(x)$
$x^r B_m(x)$	الصفر جذر مضاعف r مرة للمعادلة المميزة .	
$B_m(x)\, e^{rx}$	α ليس جذراً للمعادلة المميزة .	II. $A_m(x)\, e^{\alpha x}$
$x^r B_m(x)\, e^{\alpha x}$	α جذر مضاعف r مرة للمعادلة المميزة .	
$e^{\alpha x}[B_m(x) \cos \beta x + C_m(x) \sin \beta x]$	$\alpha+i\beta$ ليس جذراً للمعادلة المميزة .	III. $A_m(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x$ أو $A_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$ أو مجموعهما
$x^r e^{\alpha x}[B_m(x) \cos \beta x + C_m(x) \sin \beta x]$	$\alpha+i\beta$ جذر مضاعف r مرة للمعادلة المميزة .	

الحالة III نفسها بوضع $\alpha = 0$	IV. $A_m (x) \cos \beta x$ أو $A_m (x) \sin \beta x$
استخدم التحويل $y = z e^{\alpha x}$.	ψ تابع لـ x V. $e^{\alpha x} \psi (x)$

354. طرائق المؤثر التفاضلي

إذا أدخلنا الرمز $D \equiv \dfrac{d}{dx}$

يمكن أن نكتب dy / dx بالشكل Dy ونسمي D **المؤثر التفاضلي البسيط** . كما نعبر عن المشتق الثاني للتابع y بالرمز $D^2 y$ لأن

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = D (D y) = D^2 y$$

وهكذا فإن $y^{(n)} \equiv D^n y$. ويمكن استنتاج خواص المؤثر التفاضلي البسيط من خواص المشتقات . فإذا كان $f(x), g(x)$ تابعين قابلين للمفاضلة نجد

$$D \left[f(x) + g(x) \right] = D f(x) + D g(x)$$

$$D \left[c\, g(x) \right] = c \left[D g(x) \right]$$

$$D^m \left[D^n f(x) \right] = D^n \left[D^m f(x) \right] = D^{m+n} f(x)$$

وهكذا يمكن أن نكتب المعادلة

$$y''' + 5 y' - y = e^x$$

باستخدام المؤثر التفاضلي بالشكل

$$(D^3 + 5D - 1)y = e^x$$

حيث نسمي $D^3 + 5D - 1$ **كثير الحدود التفاضلي** (أو **المؤثر التفاضلي**) من الدرجة الثالثة . وهكذا نكتب المعادلة التفاضلية من المرتبة n بالشكل $P(D)y = X$ حيث $P(D)$ كثير الحدود التفاضلي (المؤثر التفاضلي)

$$P(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n$$

فإذا كانت $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ثوابتاً قلنا إن كثير الحدود التفاضلي ذو أمثال ثابتة ، أما إذا كانت $a_0, a_1, \ldots, a_n$ توابع لـ x قلنا إن كثير الحدود التفاضلي ذو أمثال متغيرة .

خواص كثيرات الحدود التفاضلية ذات الأمثال الثابتة .

تسلك كثيرات الحدود التفاضلية سلوكاً مشابهاً لكثيرات الحدود الجبرية ، فإذا كان $L_1(D)$ و $L_2(D)$ كثيري حدود تفاضليين فإن

$$\left[L_1(D) + L_2(D)\right]h(x) = \left[L_2(D) + L_1(D)\right]h(x)$$

$$L_1(D)\left[k\,h(x)\right] = k\,L_1(D)\,h(x)$$

$$L_1(D)\left[L_2(D)\,h(x)\right] = L_2(D)\left[L_1(D)\,h(x)\right] =$$

$$= \left[L_1(D)\,L_2(D)\right]h(x)$$

$$\left[L_1(D)\,L_2(D)\right]h(x) = \left[L_2(D)\,L_1(D)\right]h(x)$$

$$\left[L_1(D) + L_2(D)\right]h(x) = L_1(D)\,h(x) + L_2(D)\,h(x)$$

المؤثر المعاكس لكثير الحدود التفاضلي . ليكن $L(D)$ مؤثراً تفاضلياً فإنه يمكن تعريف المؤثر التفاضلي المعاكس $L^{-1}(D)$ بأنه ذلك المؤثر الذي يحقق

$$L^{-1}(D)\left[L(D)y\right] = y$$

ويمكن أن نرمز للمؤثر المعاكس بالرمز $\dfrac{1}{L(D)}$

نظرية . لتكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$L(D)y = X$$

فإن الحل الخاص y_p يعطى بالشكل

$$y_p = \frac{1}{L(D)}X = L^{-1}(D)X$$

حيث X تابع للمتغير x .

وهكذا فإن ايجاد الحل الخاص يعتمد على إيجاد المؤثر المعاكس للمؤثر التفاضلي .

قاعدة أساسية

$$\frac{1}{D-a}f(x) = e^{ax}\int e^{-ax}f(x)\,dx$$

خواص المؤثر المعاكس لتكن L, L_1, L_2 مؤثرات تفاضَلية ، فإن

$$\frac{1}{L(D)}\left[f(x) + g(x)\right] = \frac{1}{L(D)}f(x) + \frac{1}{L(D)}g(x)$$

$$\frac{1}{L(D)}\left[k\, f(x)\right] = k\ \frac{1}{L(D)} f(x)$$

$$\frac{1}{L_1(D)\ L_2(D)} f(x) = \frac{1}{L_1(D)}\left[\frac{1}{L_2(D)} f(x)\right]$$

إيجاد المؤثر المعاكس

لايجاد

$$\frac{1}{L(D)} f(x)$$

نستخدم إحدى طريقتين :

الطريقة الأولى . التكاملات المكررة . نقوم بتفريق $L(D)$ إلى أقواس بسيطة فنجد

$$\frac{1}{L(D)} f(x) = \frac{1}{(D-\alpha_1)\ (D-\alpha_2)\ \ldots\ (D-\alpha_n)} f(x)$$

ثم نطبق القاعدة الأساسية على كل كسر بسيط على التوالي . وهكذا فإن

$$\frac{1}{D^2 - 5D + 6} \sin x = \frac{1}{D-3}\left[\frac{1}{D-2}\Bigg|\sin x\right]$$

الطريقة الثانية . نفرق $L(D)$ إلى أقواس بسيطة ثم نفرق الكسر

$$\frac{1}{(D-\alpha_1)\ (D-\alpha_2)\ \ldots\ (D-\alpha_n)}$$

إلى مجموع كسور كما لو كنا نفرق كسراً في المتغير x بقصد المكاملة فنجد

$$\frac{1}{L(D)} f(x) = \left[\frac{A_1}{D-\alpha_1} + \frac{A_2}{D-\alpha_2} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{A_n}{D-\alpha_n} \right] f(x)$$

ثم نطبق القاعدة الأساسية على كل كسر على حدة .

ومن أجل السهولة نورد فيما يلي جدولاً نبين فيه قيم المؤثر المعاكس لبعض التوابع الشهيرة وبعض الخواص التي تجعل طريقة المؤثر التفاضلي أكثر فعالية وسرعة .

جدول المؤثرات المعاكسة للمؤثر التفاضلي

رقم	العبـــارة	قيمة المؤثر المعاكس
1	$\frac{1}{f(D)} e^{ax}$	$\frac{e^{ax}}{f(a)}$ $[f(a) \neq 0]$
2	$\frac{1}{(D-a)^m} e^{ax}$	$\frac{x^m e^{ax}}{m!}$ $(m = 1, 2, \ldots)$
3	$\frac{1}{(D-a)^m f(D)} e^{ax}$	$\frac{x^m e^{ax}}{m! f(a)}$ $[m = 1, 2, \ldots, f(a) \neq 0]$
4	$\frac{1}{D^2+a^2} \sin bx$	$\frac{\sin bx}{a^2-b^2}$ $(a \neq b)$
5	$\frac{1}{D^2+a^2} \sin ax$	$\frac{-x \cos ax}{2a}$
6	$\frac{1}{D^2+a^2} \cos bx$	$\frac{\cos bx}{a^2-b^2}$ $(a \neq b)$

رقم	العبارة	قيمة المؤثر المعاكس
7	$\frac{1}{D^2 + a^2} \cos ax$	$\frac{x \sin ax}{2a}$
8	$\frac{1}{aD^2 + bD + c} \sin \omega x$	$\frac{(c - a\omega^2) \sin \omega x - b\omega \cos \omega x}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2}$ (denom $\neq 0$)
9	$\frac{1}{aD^2 + bD + c} \cos \omega x$	$\frac{(c - a\omega^2) \cos \omega x + b\omega \sin \omega x}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2}$ (denom $\neq 0$)
10	$\frac{1}{f(D)} [c_1Q_1(x) + c_2Q_2(x)]$	$c_1 \frac{1}{f(D)} Q_1(x) + c_2 \frac{1}{f(D)} Q_2(x)$
11	$\frac{1}{f(D)g(D)} Q(x)$	$\frac{1}{f(D)} \left[\frac{1}{g(D)} Q(x)\right]$ or $\frac{1}{g(D)} \left[\frac{1}{f(D)} Q(x)\right]$
12	$\frac{1}{D} Q(x)$	$\int Q(x)\, dx$ (con'
13	$\frac{1}{D - a} Q(x)$	$e^{ax} \int e^{-ax} Q(x)\, dx$
14	$\frac{1}{(D - a)^m} Q(x)$ ($m = 1, 2, \ldots$)	$\frac{e^{ax}}{(m - 1)!} \int_c^x e^{-au} (x - u)^{m-1} Q(u)\, du$ (اختياري c)
15	$\frac{1}{(D - a)^2 + b^2} Q(x)$ ($b \neq 0$)	$\frac{e^{ax}}{b} \int_c^x e^{-au} \sin b(x - u)\, Q(u)\, du$ (اختياري c)
16	$\frac{1}{f(D)} e^{ax}Q(x)$	$e^{ax} \frac{1}{f(D + a)} Q(x)$
17	$\frac{1}{f(D)} e^{ax}P(x)$ [$f(a) \neq 0$. $p(x)$ كثير حدود من الدرجة N	$e^{ax} \left[g(a)P(x) + \frac{g'(a)}{1!} P'(x) + \cdots + \frac{g^{(N)}(a)}{N!} P^{(N)}(x)\right]$ [$g(r) = 1/f(r)$]

رقم	العبارة	قيمة المؤشر المعاكس
18	$\frac{1}{(D-a)^m f(D)} e^{ax} P(x)$ $[f(a) \neq 0, m = 1, 2, \ldots,$ p كثير حدود من الدرجة N	$e^{ax}\left[g(a)Q(x) + \frac{g'(a)}{1!}Q'(x) + \cdots + \frac{g^{(N)}(a)}{N!}Q^{(N)}(x)\right]$ $[g(r) = 1/f(r), Q(x) = (1/D^m)P(x)]$
19	$\frac{1}{f(D)} Q(x)$ $[f(r) = a_0(r - r_1) \ldots$ $(r - r_n),$ $r_1, \ldots, r_n$ مختلفة]	$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(r_k)} \frac{1}{D - r_k} Q(x)$
20	$\frac{1}{f(D)} Q(x)$	$\int_c^x Q(u) W(x-u)\, du,$ حيث $W(x)$ حل للمعادلة $f(D)y \equiv (a_0 D^n + \cdots)y = 0$ ضمن الشروط $W(0)=0 \quad W'(0) = 0, \ldots, W^{(n-2)}(0) = 0,$ $W^{(n-1)}(0) = 1/a_0$
21	$\frac{1}{f(D)} Q(x - x_0)$	$\phi(x - x_0),\ ($حيث $\phi(x) = \frac{1}{f(D)} Q(x).)$

355. الحركة البسيطة التوافقية المتخامدة

إن حل المعادلة

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\rho \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f(t) \qquad (1)$$

(ρ و ω حقيقيان)

هو مجموع تابعين : الحل الخاص x_p الذي نسميه **حل حالة الرسوخ** ، والحل المتمم x_c (حل المعادلة المتجانسة الموافقة) ونسميه **الحل العابر** .

(2) $x_c = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t} \quad , \quad \rho^2 - \omega^2 \neq 0$

(3) $x_c = (A + Bt)e^{-\rho t} \quad , \quad \rho^2 - \omega^2 = 0$

حيث A و B ثابتان اختياريان ، m_1 و m_2 جذرا المعادلة المميزة

$$m^2 + 2\rho m + \omega^2 = 0$$

عندما $\rho^2 > \omega^2$ فالجذران m_1, m_2 حقيقيان والحركة **متخامدة** ولا يوجد أي اهتزاز .

عندما $\rho^2 = \omega^2$ فإن $m_1 = m_2$ والحركة **متخامدة بصورة حرجة** .

عندما $\rho^2 < \omega^2$ فإن m_1, m_2 عقديان مترافقان والحركة **تذبذبية متخامدة** . وعندئذٍ

(4) $x_c = e^{-\rho t}[C \cos ht + D \sin ht] = e^{-\rho t}\bar{C} \cos (ht - \gamma)$

حيث

$$h = \sqrt{\omega^2 - \rho^2} \quad , \bar{C} = \sqrt{C^2 + D^2}$$

$$\gamma = \tan^{-1} (D / C)$$

ودور التذبذب هو $2\pi / h$. أما C , D فهما ثابتا المكاملة الاختياريان .

356 الاهتزاز القسري

يتعلق الحل الخاص x_p للمعادلة (1) بالقوة $f(t)$ ، إذ لو كان $f(t) = L \cos pt$ فإن

(5) $x_p = \frac{L}{Q} \cos (pt - \beta) \qquad (\rho^2 \neq \omega^2)$

حيث $Q^2 = (\omega^2 - p^2)^2 + 4\rho^2 p^2$ و

$$x_p = \frac{L}{\rho^2 + p^2} \cos(pt - \beta) \qquad (\rho^2 = \omega^2) \tag{6}$$

لدينا هنا $\tan \beta = 2 \rho p / (\omega^2 - p^2)$. والحل العام للمعادلة (1) هو $x = x_c + x_p$ ، حيث يتم تعيين ثوابت المكاملة A, B, C, D من القيم الابتدائية لـ x و dx / dt. وفي الحالة يكون فيها p تردد f بشكل يجعل سعة الاهتزاز في (5) تأخذ قيمة عظمى ، فإننا نحصل على ما يسمى ظاهرة الطنين (الرنين) .

357. معادلة أويلر - كوشي

هي المعادلة الخطية

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = X(x) \tag{1}$$

للحل نستخدم التحويل $x = e^t$ الذي يجعل

$$x\,(dy / dx) = D y \,,\ x^2 (d^2 y / d x^2) = (D^2 - D)\, y \,, \ldots$$

حيث $D = d / dt$ ، ويحوّل (1) إلى معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة يتم حلها كما في 350 .

358. المعادلات التفاضلية التامة

الشرط اللازم والكافي لتكون المعادلة

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \tag{1}$$

تامة ويكون لها حل من الشكل $\psi(x, y, z, c) = 0$ هو

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \tag{2}$$

حيث P, Q, R توابع لـ x, y, z .

ملاحظة . عندما يكون لدينا متغيران فقط نحصل على المعادلة $P\,dx + Q\,dy = 0$ وشرط كون المعادلة تامة هو

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

359 a. حل المعادلة التامة بثلاثة متغيرات

يتم حل المعادلة التامة وفق الخطوات التالية :

(a) نوجد التكامل $V = c$ لـ $P\,dx + Q\,dy = 0$ حيث نعتبر z ثابتاً .

(b) نفرض أن $V = c\,(z)$ حل للمعادلة (1) ونفاضل الطرفين فنجد بمقارنة الناتج مع (1) معادلة تعطي $c'\,(z)$.

(c) نكامل المعادلة الناتجة بالنسبة للمجهول $c\,(z)$ فنحصل على ثابت اختياري k ويكون الحل العام $V = c\,(z) + k$.

359 b. حل المعادلة التامة بمتغيرين

يتم الحل وفق الخطوات التالية :

(a) نكامل P بالنسبة لـ x باعتبار y ثابت فنحصل على

$$\int P\,\partial x = u + c\,(y)$$

(b) نشتق $u + c\,(y)$ بالنسبة لـ y ونطابق مع Q فنحصل على معادلة تحوي $c'\,(y)$ نحسب منها $c\,(y)$ ويكون الحل العام $u + c\,(y) = k$.

360. المعادلة غير التامة

عندما لا تكون المعادلة تامة نقول إنها غير قابلة للمكاملة . وللحصول على الحل نفرض علاقة اختيارية $g\ (x,\ y,\ z\ )\ =\ 0$ بين x و y و z . وتعين هذه العلاقة (مع بعض الشروط على g) واحداً من المتغيرات بدلالة المتغيرين الآخرين ، مثلاً $z\ =\ h\ (\ x,y\ )$. وبتعويض z في (1) فنحصل على معادلة في x و y . إذا فرضنا الآن أن $\omega\ (\ x,y,c\ )\ =\ 0$ هو تكامل (حل) لهذه المعادلة فإن الحل العام للمعادلة (1) هو المعادلة الاختيارية $g\ (\ x,y,z\ )\ =\ 0$ والعلاقة

$$\omega\ (\ x,y,z\ )\ =\ 0$$

حيث c ثابت اختياري .

361. التفسير الهندسي

يمكن فهم المعادلة (1) على أنها تمثل متجهين **متعامدين** متناسبين مع $P:Q:R$ و $d\,x:d\,y:d\,z$. وإيجاد الحل العام يعني إيجاد المحل الهندسي الذي يُبقي هذين المتجهين متعامدين . فإذا كانت (1) قابلة للمكاملة فالمحل الهندسي الموافق لحل هذه المعادلة هو مجموعة السطوح المتعامدة مع المتجه المتناسب مع $P:Q:R$ في كل نقطة $P\ (\ x,y,z\ )$ كما تتحقق خاصة التعامد هذه عند كل نقطة من منحنٍ مرسوم على السطح . فإذا لم تكن (1) قابلة للمكاملة ، فإنه لا توجد مجموعة السطوح هذه المحققة لشرط التعامد . أما الحل فيكون مجموعة من المنحنيات الواقعة على سطح مفروض (ممكن) والتي تحقق خاصة التعامد مع المتجه المتناسب مع $P:Q:R$.

362. مجموعة معادلتين تامتين بثلاثة متغيرات

هي المجموعة

$$\begin{cases} P_1\,dx + Q_1\,dy + R_1\,dz = 0 \\ P_2\,dx + Q_2\,dy + R_2\,dz = 0 \end{cases} \tag{1}$$

حيث ... $P_1, Q_1, R_1, P_2,$ توابع لـ x, y, z . ويمكن كتابة المعادلتين (1) بالشكل

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{2}$$

حيث

$$P = \begin{vmatrix} Q_1 & R_1 \\ Q_2 & R_2 \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} R_1 & P_1 \\ R_2 & P_2 \end{vmatrix} \qquad R = \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix} \tag{3}$$

ويكتب الحل العام للمعادلة (1) بالشكل

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z,c_1) = 0 \\ \varphi_2(x,y,z,c_2) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان . ويتم إيجاد هاتين العلاقتين بصورة مشابهة لما ورد في الفقرتين السابقتين .

17. كثيرات حدود لوجاندر . توابع بسل

كثيرات حدود لوجاندر

363. معادلة لوجاندر

هي المعادلة

(1) $$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

حيث n عدد حقيقي ثابت و x ، y متغيران حقيقيان . ويكون التابع

(2) $$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{m+k}$$

حلاً للمعادلة (1) فقط إذا كان

(3) $$m(m - 1)a_0 = 0$$ (المعادلة الدليلية)

(4) $$(m + 1)ma_1 = 0$$

(5) $$\lambda_0 \equiv (m + 2)(m + 1)a_2 - (m - n)(m + n + 1)a_0 = 0$$

(6) $$\lambda_k \equiv (m + k + 2)(m + k + 1)a_{k+2} + (n - m - k)(n + m + k + 1)a_k = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots$$

ونسمي قيمة m المحققة للمعادلة (3) **دليل** المعادلة (1) .

364. الحالة $m = 0$

لدينا في هذه الحالة

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} = -(n-k)(n+k+1)a_k \tag{7}$$

وتشكل الحدود الفردية والزوجية لـ a_n مجموعتي حلول مستقلين . ويكون الحل العام للمعادلة (1) هو

$$y = a_0 u(x) + a_1 v(x) \tag{8}$$

حيث a_0, a_1 ثابتان إختياريان و

$$u(x) \equiv 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \cdots \tag{9}$$

$$v(x) \equiv x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots \tag{10}$$

وتتقارب هاتان السلسلتان بانتظام في أي مجال جزئي من [1 + ,1 −] . أما إذا كان $m = 1$ فإن حل المعادلة (1) هو

$$y = a_0\, u(x)$$

365. كثيرات حدود لوجاندر

عندما يكون n صحيحاً زوجياً فإن $a_0\, u(x)$ كثير حدود ، فإن كان n فردياً يكون $a_1\, v(x)$ كثير حدود .

نختار $a_0 = 0$ و $a_1 \neq 0$ عندما يكون n صحيحاً فردياً .

ونختار $a_1 = 0$ ، $a_0 \neq 0$ عندما يكون n صحيحاً زوجياً .

وكحلول خاصة للمعادلة (1) نجد

$$(11)\quad \begin{aligned} P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{3x^2 - 1}{2} \\ P_3(x) &= \frac{5x^3 - 3x}{2} \\ P_4(x) &= \frac{7 \cdot 5}{4 \cdot 2} x^4 - 2 \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2} x^2 + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \\ P_5(x) &= \frac{9 \cdot 7}{4 \cdot 2} x^5 - 2 \frac{7 \cdot 5}{4 \cdot 2} x^3 + \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2} x \end{aligned}$$

$$(12)\quad P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{[n/2]} (-1)^\nu \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 2\nu - 1)}{2^\nu \nu! (n - 2\nu)!} x^{n-2\nu}$$

حيث $n/2 = [n/2]$ إذا كان n زوجياً و $[n/2] = (n-1)/2$

إذا كان n فردياً . ويتم تعيين a_0 أو a_1 بحيث $P_n(1) = 1$ و $P_0(x) \equiv 1$

366. خواص كثيرات حدود لوجاندر

$$(13)\quad \begin{aligned} P'_{n+1} &= xP'_n + (n + 1)P_n \\ (1 - x^2)P'_n &= (n + 1)(xP_n - P_{n+1}) \\ (2n + 1)xP_n &= (n + 1)P_{n+1} + nP_{n-1} \\ (2n + 1)P_n &= P'_{n+1} - P'_{n-1} \end{aligned}$$

حيث $P_n(x)$ هي الأمثال a_n للحد الذي يحوي h^n في

$$(14)\quad (1 - 2xh + h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n \qquad \text{(التابع المولِّد)}$$

$$(15)\quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$ (صيغة رودريغ)

تكون $P_n(x)$ متعامدة من أجل $-1 \leqq x \leqq 1$

$$(16)\quad \int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1}$$

حيث $\delta_{mn} = 1$ إذا كان $m = n$ و $\delta_{mn} = 0$ إذا كان $m \neq n$.

367. كثيرات حدود لوجاندر المتشاركة

يوجد للمعادلة

$$(17)\quad (1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0$$

حل هو $y = (1-x^2)^{m/2}(d^m/dx^m)P_n(x)$

نرمز له بـ $P_n^m(x)$ ونسميه كثير حدود لوجاندر المتشارك . ويكون $P_n^m(x) = 0$ عندما $m > n$.

تكون مجموعة التوابع $P_n^m(x)$ متعامدة في المجال $-1 \leqq x \leqq 1$

$$(18)\quad \int_{-1}^{+1} P_m^s(x)P_n^s(x)\,dx = \frac{(n+s)!}{(n-s)!}\frac{2\delta_{mn}}{(2n+1)}$$

توابع بِسِل

368. معادلة بِسِل

هي

$$(1)\quad x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$$

حيث n ثابت حقيقي ، x و y متغيران حقيقيان . ويكون

$$y = x^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{2}$$

حلاً للمعادلة (1) فقط إذا كان

(3) $(m^2 - n^2)a_0 = 0$ (المعادلة الدليلية)

(4) $[(m + 1)^2 - n^2]a_1 = 0$

(5) $[(m + 2)^2 - n^2]a_2 + a_0 = 0$

(6) $[(m + k)^2 - n^2]a_k + a_{k-2} = 0$ $k = 2, 3, \ldots$

ونسمي قيمة m المحققة لـ (3) **دليلاً** للمعادلة (1).

إذا فرضنا a_0 اختيارية فإن $m = \pm n$ ينتج من (3) .

369. الحالة $\mathbf{m = n}$

لدينا في هذه الحالة

$$a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{a_0}{2(2n + 2)},\ \ldots,\ a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2n + k)} \tag{7}$$

ويكون

$$y_1 = a_0 x^n \left[1 - \frac{x^2}{2(2n + 2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n + 2)(2n + 4)} - \cdots\right] \tag{8}$$

حلاً خاصاً للمعادلة (1) بفرض أن n ليس صحيحاً سالباً .

370. الحالة $\mathbf{m = -n}$

في هذه الحالة

$$(9) \qquad a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{2(2n-2)},\ \ldots,\ a_k = \frac{a_{k-2}}{k(2n-k)}$$

ويكون

$$(10) \quad y_2 = a_0 x^{-n}\left[1 + \frac{x^2}{2(2n-2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n-2)(2n-4)} + \cdots\right]$$

حلاً خاصاً للمعادلة (1) بفرض أن n ليس صحيحاً موجباً . فإذا كان $n = 0$ تطابقت العلاقتان (8) و (10) . إذا لم يكن n عدداً صحيحاً فإن (8) و (10) مستقلان خطياً والحل العام للمعادلة (1) هو

$$(11) \qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

371. توابع بِسِل من النوع الأول

إذا وضعنا في (8) $a_0 = 1 / [\, 2^n \Gamma(n+1)\,]$ حيث $\Gamma(n+1) = n!$ عندما يكون n صحيحاً موجباً فإن y_1 يأخذ الشكل

$$(12) \qquad J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

حيث n ليس صحيحاً سالباً ، وتتقارب السلسلة (12) من أجل جميع قيم x . نسمي $J_n(x)$ **تابع بِسِل من النوع الأول من المرتبة** n . إذا كان n صحيحاً موجباً ، نعرّف $J_n(x)$ بالعلاقة :

$$(13) \qquad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

372. علاقات الارتداد

ليكن $J'_n(x) = dJ_n(x)/dx$ فإن

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \tag{14}$$

$$xJ'_n(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

$$xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$$

$$xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x) = 2nJ_n(x)$$

إذا وضعنا $a_0 = 1/[2^{-n}\,\Gamma(-n+1)]$ في المعادلة (10) فإن $y_2 = J_{-n}(x)$. فإذا لم يكن n عدداً صحيحاً فإن الحل العام للمعادلة (1) هو

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x)$$

373. توابع بِسِل من النوع الثاني

عندما يكون n صحيحاً موجباً فالحل العام للمعادلة (1) هو

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x) \tag{15}$$

حيث $Y_n(x)$ هو تابع بِسِل من النوع الثاني والمرتبة n والمعرف كما يلي :

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)\left[\log\frac{x}{2} + \gamma\right] - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \tag{16}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}[\phi(k) + \phi(k+n)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

حيث

$$\phi(k) \equiv \sum_{t=1}^{k} t^{-1} \qquad \phi(0) = 0 \qquad \gamma = 0.5772157$$

وتتقارب السلسلة في (16) من أجل جميع قيم x .

374. علاقات إضافية

$$(17) \quad J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\,(n\phi - x\sin\phi)\,d\phi$$ (n عدد صحيح)

يمكن توليد $J_x(x)$ من العلاقتين

$$(18) \qquad e^{(x/2)[t-(1/t)]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

$$(19) \qquad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

18. المعادلات التفاضلية الجزئية

375. تمهيد

المعادلة التفاضلية الجزئية هي تلك المعادلة التي تحوي مشتقات جزئية لتابع لعدة متغيرات . ويمكن إيجاد الحلول لهذه المعادلات في حالات خاصة وقليلة جداً . ويحتوي حل المعادلة التفاضلية الجزئية عموماً توابع اختيارية بصورة تشبه احتواء حل المعادلة التفاضلية العادية على ثوابت اختيارية .

ويكون المطلوب في التطبيقات العملية إيجاد تابع خاص يحقق المعادلة التفاضلية ويحقق شروطاً ابتدائية أو حدودية .

376. معادلة أويلر

معادلة أويلر العامة هي

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

حيث a, b, c ثوابت . والحل العام لهذه المعادلة هو

$$\begin{cases} z = \varphi(x + \lambda_1 y) + \psi(x + \lambda_2 y) & (b^2 \neq ac) \\ z = \varphi(x + \lambda_1 y) + (\gamma x + \delta y)\psi(x + \lambda_1 y) & (b^2 = ac) \end{cases} \tag{2}$$

حيث λ_1, λ_2 جذرا المعادلة

$$c\lambda^2 + 2b\lambda + a = 0$$

φ و ψ تابعان اختياريان ، γ و δ ثابتان اختياريان

أمثلة . الحل العام للمعادلة $\partial^2 z / \partial x \partial y = 0$ هو

$z = \varphi(x) + \psi(y)$ حيث φ و ψ تابعان اختياريان .

الحل العام للمعادلة $\partial^2 u / \partial t^2 = a^2 \partial^2 u / \partial x^2$ هو

$$u = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$$

حيث φ و ψ تابعان اختياريان .

377. المعادلة التفاضلية الخطية الجزئية من المرتبة الأولى

هي المعادلة

$$Ap + Bq = C \qquad (3)$$

حيث A, B, C هي توابع لـ x, y, z و

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = z_x \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = z_y$$

الحل العام لهذه المعادلة هو $\Phi(u,v)$ حيث Φ تابع اختياري و

$\left[u(x, y, z) = C_1 , v(x, y, z) = C_2 \right]$ هو الحل العام للمعادلتين

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C} \qquad (4)$$

أما الناظم على السطح $\Phi(u,v) = 0$ فهو عمودي على المنحنيات المعرفة

بالمعادلتين (4) . وتُعطى **المنحنيات المميزة** للمعادلة (3) بالعلاقتين $u = C_1$, $.v = C_2$

378. معادلة لابلاس

هي المعادلة

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

والحل العام لها هو

$$\varphi = f_1(x + iy) + f_2(x - iy) \qquad i^2 = -1 \tag{6}$$

حيث f_1 , f_2 تابعان اختياريان . ويعتبر هذا الحل عاماً جداً في التطبيقات ، بسبب صعوبة تعيين تابع يحقق شروطاً حدودية معطاة . ونسمي التابع الذي يحقق المعادلة (5) **التابع التوافقي** .

379. حل معادلة لابلاس

توجد طريقة مفيدة لحل معادلة لابلاس وهي تعتمد على افتراض أن الحل الخاص يساوي جداء تابعين أحدهما لـ x والآخر لـ y . ويتم الحصول على الحل العام من اجراء تركيب لعدد من هذه الحلول الخاصة . نفرض مثلاً أن

$$\varphi = X(x) \cdot Y(y) \tag{7}$$

هو حل للمعادلة (5) عندئذٍ

$$(X'' / X) + (Y'' / Y) = 0$$

وينتج أن

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \omega^2 \qquad \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\omega^2 \tag{8}$$

حيث ω ثابت . وحلول المعادلة (8) هي

$$X = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x \qquad Y = c_3 e^{\omega y} + c_4 e^{-\omega y} \tag{9}$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية . وتأخذ (7) عندئذٍ الشكل

$$\begin{aligned} \varphi \equiv \varphi(\omega) &= e^{\omega y}(A_\omega \cos \omega x + B_\omega \sin \omega x) \\ &\quad + e^{-\omega y}(C_\omega \cos \omega x + D_\omega \sin \omega x) \end{aligned} \tag{10}$$

حيث $A_\omega, B_\omega, C_\omega, D_\omega$ ثوابت اختيارية .

ويمكن أن نفرض عموماً أن حل المعادلة (5) هو

$$\varphi = \sum_{\omega=0}^{\infty} \varphi(\omega) \tag{11}$$

ويتم تعيين الثوابت في (11) بحيث تتحقق شروط ابتدائية أو حدودية معطاة للمسألة التي بين أيدينا .

19. سلاسل وتحويلات فورييه

380. سلاسل فورييه

ليكن $f(t)$ تابعاً حقيقاً قابلاً للمكاملة بالنسبة للمتغير t ومعرفاً على $-T/2 \leqq t \leqq T/2$ ، فإن **سلسلة فورييه** التي يولدها $f(t)$ تعطى بالعلاقة

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nwt + b_n \sin nwt) \tag{1}$$

حيث

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos nwt \, dt \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin nwt \, dt \tag{2}$$

من أجل $n = 0, 1, 2, \ldots$ ، وتسمى العلاقتان (2) **صيغتي أويلر** .

وقد يحدث ألا تتقارب السلسلة (1) في أي نقطة ، أو قد تتقارب من أجل بعض قيم t . فإذا تقاربت من أجل قيمة t_1 فليس من الضروري أن يكون مجموع السلسلة مساوياً $f(t_1)$.

أما **الدور** فهو $T = 2\pi / \omega$. ويمكن اعتبار المتغير t على أنه الزمن (بالثواني) ، أما ω فهو التردد الأساسي (بالراديان / ثانية) .

نظرية . (a) إذا تقاربت السلسلة (1) في المجال $\xi \leqq t < (\xi + T)$ فإن (1) تمثل تابعاً دوره T معرفاً من أجل جميع قيم t .

(b) إذا تقاربت (1) بانتظام إلى $f(t)$ في $-T/2 \leqq t \leqq T/2$ فإن a_n و b_n تعطى بالعلاقة (2) .

(c) **شروط ديريخلية** . إذا كان $f(t)$ مستمراً ما عدا عدداً منتهياً من نقط الانقطاع غير اللا نهائية في $-T/2 \leqq t \leqq T/2$ وكان لـ $f(t)$ عدداً منتهياً من القيم العظمى والصغرى في هذا المجال فإن سلسلة فورييه التي يولدها $f(t)$ تتقارب إلى

$$\frac{1}{2}\left[f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0)\right]$$

من أجل جميع قيم t .

وتتقارب إلى $f(t)$ من أجل جميع النقط التي يكون فيها $f(t)$ مستمراً .

(d) تتقارب سلسلة فورييه الموافقة للتابع $f(t)$ بانتظام إلى $f(t)$ في أي مجال داخل (مُحتوى في) مجال يكون فيه $f(t)$ مستمراً وذا تغيُّر محدود .

ملاحظة . نقول إن $f(t)$ **محدود** في المجال (a,b) إذا كان يوجد ثابتان h و k بحيث $h \leqq f(t) \leqq k$ من أجل جميع قيم t في المجال $a \leqq t \leqq b$. ونقول إن $f(t)$ ذو **تغير محدود** إذا كان مساوياً لفرق تابعين محدودين ومتزايدين .

381. التمثيل العقدي

إذا كان مجموع (1) هو $f(t)$ فإن العلاقة *(1)* تأخذ الشكل

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)e^{jnwt} \qquad (3)$$

حيث

$$(4)\quad F(n) = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$j^2 = -1, a_{-n} = a_n, b_{-n} = -b_n$$ من أجل $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(5)\quad F(n) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jnwt}\,dt \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ونقول إن $F(n)$ هو **تحويل فورييه** للتابع $f(t)$. كما نقول إن $F(n)$ هو **الطيف (الخطي) العقدي** للتابع $f(t)$.

.382

يمكن فهم العلاقة (3) على أنها تركيبية وفهم (5) على أنها تحليلية . ويكون $f(t)$ هو **تحويل فورييه** للتابع $F(n)$.

$$F(n) = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}\exp\left[j\tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)\right]$$

إن **طيف سعة** $f(t)$ هو $|F(n)| = \dfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

كما أن **طيف صفحة** $f(t)$ هو $\theta_n = \tan^{-1}\left(\dfrac{-b_n}{a_n}\right)$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(n)|e^{j(nwt+\theta_n)}$$

.383

إن **تابع الارتباط الذاتي** لـ $f_1(t)$ هو

$$\varphi_{11}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_1(t)f_1(t+\tau)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_{11}(n)e^{jnw\tau}$$

حيث $\Phi_{11}(n) = |F_1(n)|^2$ هو طيف القوة .

$$\Phi_{11}(n) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \varphi_{11}(\tau)e^{-jnw\tau}\,d\tau$$

(صيغة بارشفال)

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f_1(t)]^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_1(n)|^2$$

.384

إن **تابع الارتباط التصالبي** لتابعين دوريين مختلفين $f_1(t)$ و $f_2(t)$ لهما نفس التردد الأساسي هو

$$\varphi_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_1(t)f_2(t+\tau)\,dt$$

τ هنا هو انزياح في t .

.385

إن **تَلافّ** $f_1(t)$ و $f_2(t)$ هو

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_1(t)f_2(t-\tau)\,dt$$

جدول تحويلات الجيب المنتهي

تعطي المُدخَلات $f_s(n)$ قيم تحويل الجيب المنتهي $f_s(n)$ للتابع $F(x)$.

$$f_s(n) = \int_0^{\pi} F(x)\sin nx\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$F(x)$ هنا معرف على المجال $0 < x < \pi$.

مثال . إذا كان $F(x) = x/\pi$ فإن

$$f_s(n) = (-1)^{n+1}/n \, , \; n = 1, 2, \ldots$$

ملاحظة c, k, b ثوابت .

$f_s(n)$		$F(x)$	
1. $(-1)^{n+1} f_s(n)$		$F(\pi - x)$	
2. $[1 - (-1)^n]/n$		1	
3. $1/n$		$(\pi - x)/\pi$	
4. $(-1)^{n+1}/n$		x/π	
5. $\frac{2}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2}$		$\begin{cases} x \\ \pi - x \end{cases}$	من أجل $0 < x < \pi/2$ من أجل $\pi/2 < x < \pi$
6. $[1 - (-1)^n]/n^3$		$x(\pi - x)/2$	
7. $(-1)^{n+1}/n^3$		$x(\pi^2 - x^2)/(6\pi)$	
8. $[\pi^2(-1)^{n-1}/n] - 2[1 - (-1)^n]/n^3$		x^2	
9. $\pi(-1)^n[(6/n^3) - (\pi^2/n)]$		x^3	
10. $(\pi/n^2) \sin nc$	$0 < c < \pi$	$\begin{cases} (\pi - c)x \\ c(\pi - x) \end{cases}$	من أجل $x \leqq c$ من أجل $x \geqq c$
11. $(\pi/n) \cos nc$	$0 \leqq c \leqq \pi$	$\begin{cases} -x \\ \pi - x \end{cases}$	من أجل $x < c$ من أجل $x > c$
12. $n[1 - (-1)^n e^{c\pi}]/(n^2 + c^2)$		e^{cx}	
13. $n/(n^2 + c^2)$		$\sinh c(\pi - x)/\sinh c\pi$	
14. $n/(n^2 - k^2)$	$\lvert k \rvert \neq 0, 1, 2, \ldots$	$\sin k(\pi - x)/\sin k\pi$	
15. $0 \quad (n \neq m)$	$\pi/2 \quad (n = m)$	$\sin mx$	$m = 1, 2, \ldots$
16. $n[1 - (-1)^n \cos k\pi]/(n^2 - k^2)$		$\cos kx$	$\lvert k \rvert \neq 1, 2, \ldots$
17. $\begin{cases} n[1 - (-1)^{n+m}]/(n^2 - m^2) & \text{if } n \neq m \\ 0 & \text{if } n = m \end{cases}$		$\cos mx$	$m = 1, 2, \ldots$
18. $n/(n^2 - k^2)^2$	$\lvert k \rvert \neq 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{\pi \sin kx}{2k \sin^2 k\pi} - \frac{x \cos k(\pi - x)}{2k \sin k\pi}$	
19. b^n/n	$\lvert b \rvert \leqq 1$	$\frac{2}{\pi} \tan^{-1}\left[\frac{b \sin x}{(1 - b \cos x)}\right]$	
20. $[1 - (-1)^n] b^n/n$	$\lvert b \rvert \leqq 1$	$\frac{2}{\pi} \tan^{-1}\left[\frac{2b \sin x}{(1 - b^2)}\right]$	

جدول تحويلات جيب التمام المنتهي

تعطي المدخَلات $f_c(n)$ قيم تحويل جيب التمام المنتهي $f_c(n)$ للتابع $F(x)$. $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\quad f_c(n) = \int_0^{\pi} F(x) \cos nx \, dx$

هنا $F(x)$ معرف على المجال $0 < x < \pi$ و c, k, b ثوابت .

	$f_c(n)$	$F(x)$
1.	$(-1)^n f_c(n)$	$F(\pi - x)$
2.	$\begin{cases} 0 & , \quad n = 1, 2, \ldots \\ \pi & , \quad n = 0 \end{cases}$	1
3.	$\begin{cases} (2/n) \sin (n\pi/2) & , \quad n = 1, 2, \ldots \\ 0 & , \quad n = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < \pi/2 \\ -1 & , \quad \pi/2 < x < \pi \end{cases}$
4.	$\begin{cases} (2/n) \sin nc & , \quad n = 1, 2, \ldots \\ 2c - \pi & , \quad n = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < c \\ -1 & , \quad c < x < \pi \end{cases}$
5.	$\begin{cases} [(-1)^n - 1]/n^2 & , \quad n \neq 0 \\ \pi^2/2 & , \quad n = 0 \end{cases}$	x
6.	$\begin{cases} (-1)^n/n^2 & , \quad n \neq 0 \\ \pi^2/6 & , \quad n = 0 \end{cases}$	$x^2/(2\pi)$
7.	$\begin{cases} 1/n^2 & , \quad n \neq 0 \\ 0 & , \quad n = 0 \end{cases}$	$[(\pi - x)^2/(2\pi)] - \pi/6$
8.	$\begin{cases} \dfrac{3\pi^2(-1)^n}{n^2} + \dfrac{6[1 - (-1)^n]}{n^4} & , \quad n \neq 0 \\ \pi^4/4 & , \quad n = 0 \end{cases}$	x^3
9.	$[(-1)^n e^{c\pi} - 1]/(n^2 + c^2)$	e^{cx}/c
10.	$\dfrac{(-1)^n \cos k\pi - 1}{n^2 - k^2}$ $\quad \lvert k \rvert \neq 0, 1, 2, \ldots$	$(\sin kx)/k$
11.	$\begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+m} - 1}{n^2 - m^2} & , n \neq m \\ 0 & , n = m = 1, 2, \ldots \end{cases}$	$(\sin mx)/m$
12.	$1/(n^2 - k^2) \quad , \quad \lvert k \rvert \neq 0, 1, 2, \ldots$	$-\cos k(\pi - x)/(k \sin k\pi)$
13.	$\begin{cases} 0 & , \quad n \neq m \\ \pi/2 & , \quad n = m = 1, 2, \ldots \end{cases}$	$\cos mx$
14.	$1/(n^2 + c^2)$	$\cosh c(\pi - x)/(c \sinh c\pi)$
15.	$\begin{cases} b^n & , \quad n \neq 0 \\ 0 & , \quad n = 0, \lvert b \rvert < 1 \end{cases}$	$\dfrac{2b(\cos x - b)}{\pi(1 - 2b \cos x + b^2)}$

20 تحويلات لابلاس

386. تحويل لابلاس

نعرّف تحويل لابلاس $\mathfrak{L}(F)$ لتابع $F(t)$ بالعلاقة

$$\mathfrak{L}(F) = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \tag{1}$$

387. تعاريف

نقول إن $F(t)$ **مستمراً قِطْعياً** على مجال حقيقي منته $a \leqq t \leqq b$ إذا أمكن تجزئة المجال إلى عدد منته من المجالات الجزئية بحيث يكون $F(t)$ مستمراً في كل مجال جزئي ، وبحيث يكون له نهاية منتهية (محدودة) عندما تنتهي t إلى أحد طرفي المجال الجزئي أو إلى الطرف الآخر ، ابتداءً من نقطة داخل المجال الجزئي .

ليكن $F(t)$ تابعاً مستمراً قِطْعياً معرفاً من أجل جميع قيم t بحيث $-\infty < t < \infty$ ، $F(t) = 0$ من أجل $t < 0$. نقول إن $F(t)$ هو من **النمط الأسي** أي من الصنف E إذا كان يوجد عدد حقيقي σ_F بحيث

$$\int_0^\infty |F(t)| e^{-\sigma_F t}\, dt \tag{2}$$

موجود . وفي هذه الحالة نقول إن $F(t)$ هو من مرتبة $e^{\sigma_F t}$ أو أن

$$F(t) = O(e^{\sigma_F t})$$

388. خواص تحويلات لابلاس

نفرض في جميع الفقرات التالية أن $F(t)$ حقيقي وله مشتقات مستمرة $F'(t), \ldots, F^{(n-1)}(t)$ أما $F^{(n)}(t)$ فهو مستمر قِطْعياً . وبحيث تكون جميع هذه التوابع من الصنف E أي من مرتبة $e^{\sigma_F t}$ في كل مجال منته $0 \leqq t \leqq T$. كما نفرض أن s و t حقيقيان و $s > \sigma_F$.

[يمكن أن نعتبر s و $f(s)$ عقديان في الحالة العامة] .

نظرية 1. (a) إذا كان $F(t)$ من الصنف E ، فإن تحويل لابلاس موجود ويكون التكامل في (1) متقارباً بانتظام من أجل $-\infty < \omega < \infty$.

(b) إذا كان c_1 , c_2 عددين عقديين ، فإن

$$\mathfrak{L}(c_1F_1 + c_2F_2) = c_1\mathfrak{L}(F_1) + c_2\mathfrak{L}(F_2) \tag{3}$$

(c) إن التحويل $f(s)$ في (1) هو تابع تحليلي من أجل $\sigma > \sigma_F$ أي أن جميع مشتقات التابع العقدي $f(s)$ بالنسبة لـ s تكون موجودة إذا كان $\sigma > \sigma_F$ ويكون

$$\mathfrak{L}\{F'(t)\} = s\mathfrak{L}\{F(t)\} - F(+0) \tag{4}$$

حيث $F(+0)$ هي نهاية $F(t)$ عندما تنتهي t إلى الصفر بقيم موجبة .

لدينا أيضاً

$$\mathfrak{L}\{F^{(k)}(t)\} = s^k\mathfrak{L}(F) - s^{k-1}F(+0) - s^{k-2}F'(+0) - s^{k-3}F''(+0) - \cdots - F^{(k-1)}(+0) \tag{5}$$

من أجل $s > \sigma_F$ و $k = 1, 2, \ldots, n$.

نظرية 2. لدينا الخواص التالية :

$\mathfrak{L}[F] = f(s)$ $$G(t) = D_0^{-1}F(t) = \int_0^t F(u)\,du$$

$$D_0^{-2}(F) = D_0^{-1}\{D_0^{-1}(F)\} \qquad D_0^{-k}(F) = D_0^{-1}\{D_0^{-k+1}(F)\}$$

$(\sigma > \sigma_F)$ $$\mathfrak{L}[D_0^{-1}F] = \mathfrak{L}(G) = \frac{1}{s}\mathfrak{L}(F)$$

$$\mathfrak{L}[D_0^{-k}F] = \frac{1}{s^k}\mathfrak{L}(F)$$

$a > 0$ $$\mathfrak{L}[F(t-a)] = e^{-as}\mathfrak{L}(F) = e^{-as}f(s)$$
[Here $F(t) = 0$ when $t < 0$.]

$(\sigma > \sigma_F + Re\, b)$ $$\mathfrak{L}[e^{bt}F] = f(s-b)$$

$$\mathfrak{L}[tF] = -f'(s)$$

$$\mathfrak{L}[t^nF] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathfrak{L}(F) = (-1)^n f^{(n)}(s)$$

(مكاملة التحويل) $$\mathfrak{L}[t^{-1}F] = \int_s^\infty f(s)\,ds$$

$c > 0$ $$\mathfrak{L}\left[\frac{1}{c}F\left(\frac{t}{c}\right)\right] = f(cs)$$

$c > 0$ $$\mathfrak{L}\left[\frac{1}{c}e^{bt/c}F\left(\frac{t}{c}\right)\right] = f(cs-b)$$

نظرية 3. (a) إذا كان $F(t)$ دورياً أي

$F(t+a) = -F(t)$ فإن

$$\mathfrak{L}[F(t)] = \frac{\int_0^a e^{-st}F(t)\,dt}{1-e^{-as}} \qquad s > 0$$

(b) إذا كان $F(t)$ دورياً عكسياً أي $F(t+a) = -F(t)$ فإن

$F(t+2a) = F(t)$ و

$$\mathfrak{L}[F(t)] = \frac{\int_0^a e^{-st}F(t)\,dt}{1+e^{-as}} \qquad s > 0$$

نظرية 4. (a) إذا كان $F(t)$ دورياً عكسياً و $f(s) = \mathfrak{L}[F(t)]$ وكان $F_1(t)$ **تقويم نصف موجي** للتابع $F(t)$ فإن

$$\mathfrak{L}[F_1(t)] = \frac{f(s)}{1 - e^{-as}}$$

(b) إذا كان $F_2(t)$ **تقويم كامل الموجة** لـ $F(t)$ فإن

$$\mathfrak{L}[F_2(t)] = f(s) \coth \frac{as}{2}$$

التقويم نصف الموجي . هو حذف نصف الموجة السالبة بكاملها .

التقويم كامل الموجة . هو اجراء انعكاس بالنسبة للمحور t (الذي يلعب دور المحور x) لنصف الموجة السالب ، ليصبح هذا النصف فوق المحور t.

389. تحويل لابلاس العكسي

ليكن $\mathfrak{L}\left[F(t)\right] = f(s)$ فإن **تحويل لابلاس العكسي** لـ $f(s)$ هو $F(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[f(s)\right]$.

إن تحويل لابلاس العكسي ليس وحيداً ، إذ يعين $f(s)$ التابع $F(t)$ بفرق تابع صفري $N(t)$ حيث

$$\int_0^t N(u)\, du = 0 \,, \forall\, t \geqq 0$$

نظرية 5. ليكن $\mathfrak{L}\left[F(t)\right] = f(s) = p(s) / q(s)$ حيث $p(s)$ و $q(s)$ كثيرا حدود في s ليس بينهما أي عامل مشترك ، كما أن

$q(s) = \prod_{i=1}^{m} (s - a_i)$ حيث a_i أعداد مختلفة . فإذا كانت درجة $p(s)$ أقل من درجة $q(s)$ فإن

$$\mathfrak{L}^{-1}[f(s)] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p(s)}{q(s)}\right] = \sum_{i=1}^{m} \frac{p(a_i)}{q'(a_i)} e^{a_i t}$$

390. التلافّ

ليكن $F(t)$ و $G(t)$ تابعين مستمرين قِطْعياً من أجل $t \geqq 0$ ومطابقين للصفر من أجل $t < 0$. نعرّف **تلافّ** F و G بأنه

$$F * G = \int_0^t F(u)G(t-u)\,du$$

$$\mathfrak{L}(F * G) = \mathfrak{L}(F)\mathfrak{L}(G) \qquad (\sigma > \sigma_0)$$

ونلاحظ أن تلاف التابعين F و G ما هو إلا تحويل لابلاس العكسي لجداء تحويلي لابلاس لهذين التابعين .

جدول تحويلات لابلاس

تعطي المُدخَلات $f(s)$ قيم تحويل لابلاس $\mathfrak{L}[F(t)] \equiv f(s)$ للتابع $F(t)$. أما مُدخَلات العمود $F(t)$ فتعطي $F(t)$ من أجل $t \geqq 0$.

لدينا هنا a, b, c, k ثوابت و $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt$.

ملاحظات حول الجدول . لقد وردت الإشارتان * و † من أجل بعض تحويلات لابلاس ونبين فيما يلي أرقام التحويلات التي وردت عندها هاتان الإشارتان ومعنى هاتين الإشارتين من أجل كل حالة .

20, 21, 22. a, b, c ثوابت مختلفة .

38. $L_n(t)$ هنا هو كثير حدود لاغرا من الدرجة n .

43. $erf\, y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-u^2}\, du \; ; \; erfc\, y = 1 - erf\, y$

50. $I_n(x) \equiv i^{-n} J_n(ix)$ حيث J_n هو تابع بِسِل من النوع الأول .

54. $H_n(x) \equiv e^{x^2}[d^n(e^{-x^2})/dx^n]$ هو كثير حدود هرميت .

85 - 90. استخدمنا $\log s$ و $\log_e s$ و ln_s بالمعنى نفسه .

85 - 90. التوابع الواردة هنا معرفة كما يلي :

(تابع التكامل الأسي) $* \operatorname{Ei} t = \int_{-\infty}^{t} r^{-1} e^{r}\, dr, \quad t < 0$

$-\operatorname{Ei}(-t) = \int_1^{\infty} x^{-1} e^{-tx}\, dx, \quad t > 0$

(تابع تكامل جيب التمام) $\operatorname{Ci} t = -\int_t^{\infty} r^{-1} \cos r\, dr = -\int_1^{\infty} x^{-1} \cos tx\, dx, \quad t > 0$

(تابع تكامل الجيب) $\operatorname{Si} t = \int_0^t r^{-1} \sin r\, dr, \quad t > 0$

$H(t) = \cos t \operatorname{Si} t - \sin t \operatorname{Ci} t, \quad t > 0$

108. $K_n(x)$ هو تابع بِسِل من النوع الثاني للدليل التخيلي .

120. انظر 148 ، الصيغتان 439 و *442* تعرّفان

$\delta(t)$ و $\delta^{(k)}(t - a)$

127. عندما $t > 0$ فإن $[t]$ تعني أكبر عدد صحيح $(0, 1, 2, \ldots)$ لا يتجاوز العدد t . مثلاً $[3] = 3 = [\pi]$.

	$f(s) \equiv \mathcal{L}[F(t)]$		$F(t)$
1.	$1/s$		1
2.	$1/s^2$		t
3.	$1/s^n$	$n = 1, 2, \ldots$	$t^{n-1}/(n-1)!$
4.	$1/(s-a)$		e^{at}
5.	$1/(s-a)^2$		te^{at}
6.	$1/(s-a)^n$	$n = 1, 2, \ldots$	$t^{n-1}e^{at}/(n-1)!$
7.	$a/(s^2+a^2)$		$\sin at$
8.	$s/(s^2+a^2)$		$\cos at$
9.	$a/(s^2-a^2)$		$\sinh at$
10.	$s/(s^2-a^2)$		$\cosh at$
11.	$(s \sin b + a \cos b)/(s^2+a^2)$		$\sin (at+b)$
12.	$(s \cos b - a \sin b)/(s^2+a^2)$		$\cos (at+b)$
13.	$2as/(s^2+a^2)^2$		$t \sin at$
14.	$(s^2-a^2)/(s^2+a^2)^2$		$t \cos at$
15.	$1/\sqrt{s}$		$1/\sqrt{\pi t}$
16.	$s^{-3/2}$		$2\sqrt{t/\pi}$
17.	$s^{-[n+(1/2)]}$	$n = 1, 2, \ldots$	$2^n t^{n-(1/2)}/[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}]$
18.	$\Gamma(k)/s^k$	$k > 0$	t^{k-1}
19.	$\Gamma(k)/(s-a)^k$	$k > 0$	$t^{k-1}e^{at}$
20.*	$1/[(s-a)(s-b)]$		$(e^{at}-e^{bt})/(a-b)$
21.*	$s/[(s-a)(s-b)]$		$(ae^{at}-be^{bt})/(a-b)$
22.*	$1/[(s-a)(a-b)(s-c)]$		$[(b-c)e^{at}+(c-a)e^{bt}$ $+ (a-b)e^{ct}]/A$ where $A = -(a-b)(b-c)(c-a)$
23.	$1/[s(s^2+a^2)]$		$(1-\cos at)/a^2$
24.	$1/[s^2(s^2+a^2)]$		$(at - \sin at)/a^3$
25.	$1/(s^2+a^2)^2$		$(\sin at - at \cos at)/[2a^3]$
26.	$s/(s^2+a^2)^2$		$(t \sin at)/[2a]$
27.	$s^2/(s^2+a^2)^2$		$(\sin at + at \cos at)/[2a]$
28.	$s/[(s^2+a^2)(s^2+b^2)]$	$a^2 \neq b^2$	$(\cos at - \cos bt)/(b^2-a^2)$
29.	$1/[(s-a)^2+b^2]$		$(e^{at} \sin bt)/b$

	$f(s) \equiv \mathcal{L}[F(t)]$	$F(t)$
30.	$(s-a)/[(s-a)^2+b^2]$	$e^{at}\cos bt$
31.	$3a^2/(s^3+a^3)$	$e^{-at}-e^{at/2}\cdot A$ where $A=\cos(\sqrt{3}\,at/2)-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\,at/2)$
32.	$3as/(s^3+a^3)$	$e^{-at}+e^{at/2}\cdot A$ where $A=\cos(\sqrt{3}\,at/2)+\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\,at/2)$
33.	$4a^3/(s^4+4a^4)$	$\sin at\cosh at-\cos at\sinh at$
34.	$s/(s^4+4a^4)$	$[1/(2a^2)]\sin at\sinh at$
35.	$1/(s^4-a^4)$	$(\sinh at-\sin at)/[2a^3]$
36.	$s/(s^4-a^4)$	$(\cosh at-\cos at)/[2a^2]$
37.	$8a^3s^2/(s^2+a^2)^3$	$(1+a^2t^2)\sin at-at\cos at$
38.*	$(1/s)[(s-1)/s]^n$	$L_n(t)=(e^t/n!)[d^n(t^ne^{-t})/dt^n]$
39.	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$	$(e^{bt}-e^{at})/[2\sqrt{\pi t^3}]$
40.	$s/(s-a)^{3/2}$	$e^{at}(1+2at)/\sqrt{\pi t}$
41.†	$1/(\sqrt{s}+a)$	$(1/\sqrt{\pi t})-ae^{a^2t}\operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$
42.	$\sqrt{s}/(s+a^2)$	$(1/\sqrt{\pi t})-(2ae^{-a^2t}/\sqrt{\pi})\int_0^{a\sqrt{t}}e^{\lambda^2}\,d\lambda$
43.†	$\sqrt{s}/(s-a^2)$	$(1/\sqrt{\pi t})+ae^{a^2t}\operatorname{erf}(a\sqrt{t})$
44.	$1/[\sqrt{s}(s+a^2)]$	$[2/(a\sqrt{\pi})]e^{-a^2t}\int_0^{a\sqrt{t}}e^{\lambda^2}\,d\lambda$
45.	$1/[\sqrt{s}(s-a^2)]$	$(e^{a^2t}/a)\operatorname{erf}(a\sqrt{t})$
46.	$1/[\sqrt{s}(\sqrt{s}+a)]$	$e^{a^2t}\operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$
47.	$(b^2-a^2)/[(s-a^2)(\sqrt{s}+b)]$	$e^{a^2t}[b-a\operatorname{erf}(a\sqrt{t})]-be^{b^2t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})$
48.	$(b^2-a^2)/[\sqrt{s}(s-a^2)(\sqrt{s}+b)]$	$e^{a^2t}[(b/a)\operatorname{erf}(a\sqrt{t})-1]+e^{b^2t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})$
49.	$1/[(s+a)\sqrt{s+b}]$	$(1/\sqrt{b-a})e^{-at}\operatorname{erf}(\sqrt{b-a}\sqrt{t})$
50.*	$1/[\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}]$	$e^{-(a+b)t/2}I_0[(a-b)t/2]$
51.	$1/[(s+a)^{1/2}(s+b)^{3/2}]$	$te^{-(a+b)t/2}\cdot B$ where $B\equiv I_0[(a-b)t/2]+I_1[(a-b)t/2]$
52.	$\Gamma(k)/[(s+a)^k(s+b)^k]$ $k>0$	$\sqrt{\pi}C[t/(a-b)]^{k-(1/2)}e^{-(a+b)t/2}$ $C\equiv I_{k-1/2}[(a-b)t/2]$

	$f(s) \equiv \mathcal{L}[F(t)]$		$F(t)$
53.	$(\sqrt{s+2a}-\sqrt{s})/(\sqrt{s+2a}+\sqrt{s})$		$(1/t)e^{-at}I_1(at)$
54.†	$(1-s)^n/s^{[n+(1/2)]}$		$n!H_{2n}(\sqrt{t})/[(2n)!\sqrt{\pi t}]$
55.	$(1-s)^n/s^{[n+(3/2)]}$		$-n!H_{2n+1}(\sqrt{t})/[\sqrt{\pi}(2n+1)!]$
56.	$(\sqrt{s+2a}/\sqrt{s})-1$		$ae^{-at}[I_1(at)+I_0(at)]$
57.	$(\sqrt{s+a}+\sqrt{s})^{-2\nu}/(\sqrt{s}\sqrt{s+a})$	$\nu > -1$	$(1/a^\nu)e^{-at/2}I_\nu(at/2)$
58.	$(a-b)^k/(\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b})^{2k}$	$k > 0$	$(k/t)e^{-(a+b)t/2}I_k[(a-b)t/2]$
59.	$(s^2+a^2)^{-1/2}$		$J_0(at)$
60.	$(s^2+a^2)^{-k}$	$k > 0$	$[\sqrt{\pi}/\Gamma(k)][t/2a]^{k-(1/2)}J_{k-1/2}(at)$
61.	$(s^2-a^2)^{-k}$	$k > 0$	$[\sqrt{\pi}/\Gamma(k)][t/2a]^{k-(1/2)}I_{k-1/2}(at)$
62.	$(\sqrt{s^2+a^2}-s)^\nu/\sqrt{s^2+a^2}$	$\nu > -1$	$a^\nu J_\nu(at)$
63.	$(\sqrt{s^2+a^2}-s)^k$	$k > 0$	$(ka^k/t)J_k(at)$
64.	$(s-\sqrt{s^2-a^2})^\nu/\sqrt{s^2-a^2}$	$\nu > -1$	$a^\nu I_\nu(at)$
65.	$s^{-1}e^{-k/s}$		$J_0(2\sqrt{kt})$
66.	$s^{-1/2}e^{-k/s}$		$(1/\sqrt{\pi t})\cos(2\sqrt{kt})$
67.	$s^{-1/2}e^{k/s}$		$(1/\sqrt{\pi t})\cosh(2\sqrt{kt})$
68.	$s^{-3/2}e^{-k/s}$		$(1/\sqrt{\pi k})\sin(2\sqrt{kt})$
69.	$s^{-3/2}e^{k/s}$		$(1/\sqrt{\pi k})\sinh(2\sqrt{kt})$
70.	$s^{-\mu}e^{-k/s}$	$\mu > 0$	$(t/k)^{(\mu-1)/2}J_{\mu-1}(2\sqrt{kt})$
71.	$s^{-\mu}e^{k/s}$	$\mu > 0$	$(t/k)^{(\mu-1)/2}I_{\mu-1}(2\sqrt{kt})$
72.	$e^{-k\sqrt{s}}$	$k > 0$	$[k/(2\sqrt{\pi t^3})]\exp[-k^2/(4t)]$
73.	$(1/\sqrt{s})e^{-k\sqrt{s}}$	$k \geqq 0$	$(1/\sqrt{\pi t})\exp[-k^2/(4t)]$
74.	$s^{-1}e^{-k\sqrt{s}}$	$k \geqq 0$	$\operatorname{erfc}[k/(2\sqrt{t})]$
75.	$s^{-3/2}e^{-k\sqrt{s}}$	$k \geqq 0$	$2\sqrt{t/\pi}\exp[-k^2/(4t)] - k\operatorname{erfc}[k/(2\sqrt{t})]$
76.	$ae^{-k\sqrt{s}}/[s(a+\sqrt{s})]$	$k \geqq 0$	$-e^{ak}e^{a^2t}\operatorname{erfc}A + \operatorname{erfc}[k/(2\sqrt{t})]$ where $A = a\sqrt{t}+k/(2\sqrt{t})$
77.	$e^{-k\sqrt{s}}/[\sqrt{s}(a+\sqrt{s})]$	$k \geqq 0$	$e^{ak}e^{a^2t}\operatorname{erfc}A$

	$f(s) \equiv \mathcal{L}[F(t)]$		$F(t)$
78.	$e^{-k\sqrt{s(s+a)}}/\sqrt{s(s+a)}$		$\begin{cases} 0 & \text{when } 0 < t < k \\ e^{-at/2}I_0(\frac{1}{2}a\sqrt{t^2-k^2}) & \text{when } t > k \end{cases}$
79.	$e^{-k\sqrt{s^2+a^2}}/\sqrt{s^2+a^2}$		$\begin{cases} 0 & \text{when } 0 < t < k \\ J_0(a\sqrt{t^2-k^2}) & \text{when } t > k \end{cases}$
80.	$e^{-k\sqrt{s^2-a^2}}/\sqrt{s^2-a^2}$		$\begin{cases} 0 & \text{when } 0 < t < k \\ I_0(a\sqrt{t^2-k^2}) & \text{when } t > k \end{cases}$
81.	$e^{-k(\sqrt{s^2+a^2}-s)}/\sqrt{s^2+a^2}$	$k \geqq 0$	$J_0(a\sqrt{t^2+2kt})$
82.	$e^{-ks} - e^{-k\sqrt{s^2+a^2}}$		$\begin{cases} 0 & \text{when } 0 < t < k \\ (ak/\sqrt{t^2-k^2})J_1(a\sqrt{t^2-k^2}) & \text{when } t > k \end{cases}$
83.	$e^{-k\sqrt{s^2-a^2}} - e^{-ks}$		$\begin{cases} 0 & \text{when } 0 < t < k \\ (ak/\sqrt{t^2-k^2})I_1(a\sqrt{t^2-k^2}) & \text{when } t > k \end{cases}$
84.	$[a^v \exp(-k\sqrt{s^2+a^2})]/[\sqrt{s^2+a^2}(\sqrt{s^2+a^2}+s)^\nu]$	$\nu > -1$	$\begin{cases} 0 & \text{when } 0 < t < k \\ [(t-k)/(t+k)]^{\nu/2}J_\nu(a\sqrt{t^2-k^2}) & t > k \end{cases}$
85.*	$(1/s)\log s$		$\Gamma'(1) - \log t$, $\Gamma'(1) = -0.5772157$
86.*	$s^{-k}\log s$	$k > 0$	$t^{k-1}[\Gamma'(k) - \Gamma(k)\log t][\Gamma(k)]^{-2}$
87.*	$(s-a)^{-1}\log s$	$a > 0$	$e^{at}[\log a - \mathrm{Ei}(-at)]$
88.*	$(s^2+1)^{-1}\log s$		$\cos t\,\mathrm{Si}\,t - \sin t\,\mathrm{Ci}\,t \equiv H(t)$
89.*	$s(s^2+1)^{-1}\log s$		$-\sin t\,\mathrm{Si}\,t - \cos t\,\mathrm{Ci}\,t$
90.*	$s^{-1}\log(1+ks)$	$k > 0$	$-\mathrm{Ei}(-t/k)$
91.	$\log[(s-a)/(s-b)]$		$t^{-1}(e^{bt} - e^{at})$
92.	$\log[(s+a)/(s-a)]$		$2t^{-1}\sinh at$ $\qquad \mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, a$
93.	$s^{-1}\log(1+k^2s^2)$		$-2\,\mathrm{Ci}(t/k)$
94.	$s^{-1}\log(s^2+a^2)$	$a > 0$	$2\log a - 2\,\mathrm{Ci}(at)$
95.	$s^{-2}\log(s^2+a^2)$	$a > 0$	$2a^{-1}[at\log a + \sin at - at\,\mathrm{Ci}\,at]$
96.	$\log[(s^2+a^2)/s^2]$		$2t^{-1}(1-\cos at)$
97.	$\log[(s^2-a^2)/s^2]$		$2t^{-1}(1-\cosh at)$
98.	$\cot^{-1}[(s-b)/a]$		$t^{-1}e^{bt}\sin at$
99.	$\cot^{-1}(s/k)$		$t^{-1}\sin kt$
100.	$(1/s)\cot^{-1}(s/k)$		$\mathrm{Si}\,kt$

	$f(s) \equiv \mathcal{L}[F(t)]$		$F(t)$	
101.	$e^{k^2s^2}\operatorname{erfc}(ks)$	$k>0$	$[1/(k\sqrt{\pi})]\exp[-t^2/(4k^2)]$	
102.	$s^{-1}e^{k^2s^2}\operatorname{erfc}(ks)$	$k>0$	$\operatorname{erf}[t/(2k)]$	
103.	$e^{ks}\operatorname{erfc}\sqrt{ks}$	$k>0$	$\sqrt{k}/[\pi\sqrt{t}(t+k)]$	
104.	$s^{-1/2}\operatorname{erfc}\sqrt{ks}$		$\begin{cases}0 \\ (\pi t)^{-1/2}\end{cases}$	when $0<t<k$ when $t>k$
105.	$s^{-1/2}e^{ks}\operatorname{erfc}\sqrt{ks}$	$k>0$	$1/\sqrt{\pi(t+k)}$	
106.	$s^{-1/2}e^{k^2/s}\operatorname{erfc}(k/\sqrt{s})$		$(1/\sqrt{\pi t})e^{-2k\sqrt{t}}$	
107.	$\operatorname{erf}(k/\sqrt{s})$		$[1/(\pi t)]\sin(2k\sqrt{t})$	
108.*	$K_0(ks)$		$\begin{cases}0 \\ (t^2-k^2)^{-1/2}\end{cases}$	when $0<t<k$ when $t>k$
109.	$K_0(k\sqrt{s})$		$[1/(2t)]\exp[-k^2/(4t)]$	
110.	$s^{-1}e^{ks}K_1(ks)$		$(1/k)\sqrt{t(t+2k)}$	
111.	$s^{-1/2}K_1(k\sqrt{s})$		$(1/k)\exp[-k^2/(4t)]$	
112.	$s^{-1/2}e^{k/s}K_0(k/s)$		$(2/\sqrt{\pi t})K_0(2\sqrt{2kt})$	
113.	$\pi e^{-ks}I_0(ks)$		$\begin{cases}[t(2k-t)]^{-1/2} \\ 0\end{cases}$	when $0<t<2k$ when $t>2k$
114.	$e^{-ks}I_1(ks)$		$\begin{cases}(k-t)/[\pi k\sqrt{t(2k-t)}] \\ 0\end{cases}$	when $0<t<2k$ when $t>2k$
115.	$-e^{as}\operatorname{Ei}(-as)$		$(t+a)^{-1}$	$a>0$
116.	$a^{-1}+se^{as}\operatorname{Ei}(-as)$		$(t+a)^{-2}$	$a>0$
117.	$[(\pi/2)-\operatorname{Si}s]\cos s+\operatorname{Ci}s\sin s$	$s>0$	$(t^2+1)^{-1}$	
			التوابع الدَّرَجية	
118.	s^{-1}		$U(t)=\begin{cases}0 \\ 1\end{cases}$	when $t<0$ when $t\geqq 0$
			(تابع وحدة الطبقة الأيونية)	
119.	$s^{-1}e^{-ks}$		$U(t-k)=\begin{cases}0 \\ 1\end{cases}$	when $t<k$ when $t\geqq k$
120.*	1		$\delta(t)$	(دلتا ديراك أو تابع النبض)
121.	e^{-as}	$a\geqq 0$	$\delta(t-a)$	
122.	s^ke^{-as}	$a\geqq 0$	$\delta^{(k)}(t-a)$	$k=1,2,\ldots$

	$f(s) \equiv \mathfrak{L}[F(t)]$	$F(t)$
123.	$s^{-2}e^{-ks}$	$S_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{when } t < k \\ t - k & \text{when } t \geqq k \end{cases}$
124.	$2s^{-3}e^{-ks}$	$\begin{cases} 0 & \text{when } t < k \\ (t-k)^2 & \text{when } t \geqq k \end{cases}$
125.	$\Gamma(\mu) \cdot s^{-\mu}e^{-ks}$ $\qquad \mu > 0$	$\begin{cases} 0 & \text{when } t < k \\ (t-k)^{\mu-1} & \text{when } t \geqq k \end{cases}$
126.	$s^{-1}(1 - e^{-ks})$	$\begin{cases} 1 & \text{when } 0 < t < k \\ 0 & \text{when } t > k \end{cases}$
127.†	$s^{-1}(1 - e^{-ks})^{-1} = (2s)^{-1}(1 + \coth \frac{1}{2}ks)$	$1 + [t/k] = n$ when $(n-1)k < t < nk, \quad n = 1, 2, \ldots$
128.	$s^{-1} \tanh ks$	$M(2k,t) = (-1)^{n-1}$ when $2k(n-1) < t < 2kn$ $n = 1, 2, \ldots$ (تابع الموجة المربعة)
129.	$s^{-1}(1 + e^{-ks})^{-1}$	$[M(k,t) + 1]/2 = [1 - (-1)^n]/2$ when $(n-1)k < t < nk, \quad n = 1, 2, \ldots$
130.	$(s \sinh ks)^{-1}$	$F(t) = 2(n-1)$ when $(2n-3)k < t < (2n-1)k$ $n = 1, 2, \ldots, \quad t > 0$
131.	$s^{-1} \coth ks$	$F(t) = 2n - 1$ when $2k(n-1) < t < 2kn$ $n = 1, 2, \ldots$
132.	$(s \cosh ks)^{-1}$	$M(2k,t + 3k) + 1 = 1 + (-1)^n$ when $(2n-3)k < t < (2n-1)k$ $n = 1, 2, \ldots, \quad t > 0$
133.	$s^{-1}(e^{-as} - e^{-bs})$	$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < a \\ 1 & \text{for } a < t < b \\ 0 & \text{for } t > b \end{cases}$
134.	$(m/s^2) - (ma/2s)[\coth (as/2) - 1]$	$F(t) = m(t - na)$ when $na < t < (n+1)a$ $n = 0, 1, 2, \ldots$
135.	$s^{-2} \tanh (cs/2)$	$H(c,t) = \begin{cases} t & \text{when } 0 < t < c \\ 2c - t & \text{when } c < t < 2c \end{cases}$ $H(c,t + 2nc) = H(c,t) \qquad n = 1, 2, \ldots$ (الموجة المثلثية)

$f(s) \equiv \mathcal{L}[F(t)]$	$F(t)$
136. $k(s^2 + k^2)^{-1} \coth [\pi s/(2k)]$	$\lvert\sin kt\rvert$ (تقويم كامل الموجه لـ $\sin kt$)
137. $[(s^2 + 1)(1 - e^{-\pi s})]^{-1}$	$\begin{cases} \sin t & \text{when } (2n-2)\pi < t < (2n-1)\pi \\ 0 & \text{when } (2n-1)\pi < t < 2n\pi \end{cases}$ $n = 1, 2, \ldots$ (تقويم نصف الموجه لـ $\sin t$)
138. $[(E/s) + (m/s^2)]e^{-as}$	$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < a \\ E + m(t-a) & \text{for } t > a \end{cases}$
139. $(m/s^2)(1 - e^{-as})$	$F(t) = \begin{cases} mt & \text{for } 0 < t < a \\ ma & \text{for } t > a \end{cases}$
140. $(m/s^2)(1 - 2e^{-as} + e^{-2as})$ $= (m/s^2)(1 - e^{-as})^2$	$F(t) = \begin{cases} mt & \text{for } 0 < t < a \\ -m(t-2a) & \text{for } a < t < 2a \\ 0 & \text{for } t > 2a \end{cases}$
141. $(m/s^2)[1 - (1 + as)e^{-as}]$	$F(t) = \begin{cases} mt & \text{for } 0 < t < a \\ 0 & \text{for } t > a \end{cases}$

21. توابع المتغير العقدي

391. الأعداد العقدية

العدد العقدي z هو زوج مرتب (x,y) من الأعداد الحقيقية . ويحقق هذا الزوج قواعد محددة عند اجراء العمليات على هذه الأزواج المرتبة . ونكتب $z = (x,y)$ كما يمكن أن نكتب العدد العقدي z بالشكل $z = x + i\,y$ أو $z = x + y\,i$ ، حيث i هو **الواحد التخيلي** كما أن $i^2 = -1$.

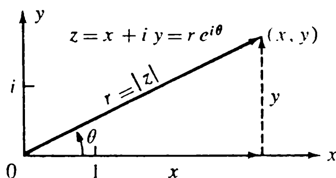
ونسمي x الجزء الحقيقي للعدد z ، كما نسمي y الجزء التخيلي للعدد z ونعبر عن ذلك بالرموز كما يلي

$$\mathcal{R}(z) = x \,,\ \mathcal{I}(z) = y$$

ويتم إجراء العمليات على الأعداد العقدية بصورة مشابهة لاجراء العمليات في الجبر العادي على الثنائيات الحقيقية . مثل $a + b$. وهكذا فإن

$$(2 + 3\,i)^2 = 4 + 12\,i + (3\,i)^2 = 4 + 12\,i - 9$$
$$= -5 + 12\,i$$

يمكن تمثيل العدد العقدي $z = x + i\,y$ بنقطة (x,y) أو بمتجه مبدؤه o ونهايته النقطة (x,y) . انظر الشكل .



ونسمي طول المتجه عندئذٍ **القيمة المطلقة (طويلة)** العدد العقدي z التي تكتب بالشكل

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مرافق العدد العقدي . ليكن $z = x + iy$ عدداً عقدياً فإن مرافقه بالتعريف هو العدد $\bar{z} = x - iy$. وينتج أن $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

إذا كانت (r,θ) هي الاحداثيات القطبية للنقطة (x,y) (حيث نأخذ θ بالراديان) فإن $|z| = r$ كما أن

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \equiv re^{i\theta} \tag{1}$$

عُمدة (سعة) العدد z هي الزاوية θ ونكتب $amp\ z = \theta$ وعمدة العدد z كثيرة التعيين .

القيمة الرئيسية لـ θ هي عمدة العدد z المحققة للشرط $-\pi < \theta \leqq \pi$ أما جميع القيم فهي $\theta + k\pi$ حيث k عدد صحيح .

يتم تمثيل **مجموع** العددين z_1 و z_2 بالجمع المتجهي المألوف لنحصل على $z_1 + z_2$.

نورد الآن عدداً من الخواص المتعلقة بالأعداد العقدية

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad |z^m| = |z|^m$$

$$|z_1 \pm z_2| \leqq |z_1| + |z_2| \qquad |z_1 \pm z_2| \geqq \big||z_1| - |z_2|\big|$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \qquad \overline{\overline{z}} = z$$

$$\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}} \right) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \qquad z_2 \neq 0$$

$$z + \overline{z} = 2x = 2\,\Re(z) \; ; \; z - \overline{z} = 2yi = 2\,\Im(z)\,i$$

392. التوابع العقدية

ليكن $z = x + iy$ متغيراً عقدياً حيث $i^2 = -1$. ولنمثّل كل z بنقطة (x,y) من المستوي xoy الذي نسميه **المستوي العقدي** Z. نسمي $w = F(z)$ تابعاً عقدياً للمتغير العقدي z إذا كان f يقابل كل عدد عقدي z من منطقة D من المستوي Z بعدد عقدي $w = f(z)$. ويمكن أن نكتب

$$w \equiv f(z) = u + iv$$

حيث $u \equiv u(x,y)$ و $v \equiv v(x,y)$ تابعان حقيقيان في المتغيرين x و y .

فلو مثلنا w بنقطة (u,v) واقعة في المستوي $uo'v$ الذي نسميه المستوي W ، لأمكن فهم **التابع العقدي** على أنه القاعدة التي تمكننا من مقابلة كل نقطة z من منطقة D في المستوي Z بنقطة w من المستوي W . فإذا كانت النقطة w المقابلة لـ z وحيدة قلنا $w = f(z)$ وحيد القيمة (وحيد التعيين) .

ملاحظة . عندما نكتب «النقطة z » فنحن نعني النقطة الممثلة للعدد العقدي z أو العدد z .

نهاية تابع . نقول إن التابع $f(z)$ وحيد القيمة ينتهي الى w_0 عندما تنتهي z إلى z_0 ونكتب

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

إذا كان يوجد مقابل كل عدد موجب ϵ عدد موجب δ بحيث

$$| f(z) - w_0 | < \epsilon$$

من أجل جميع قيم z المحققة للمتراجحتين

$$0 < | z - z_0 | < \delta$$

الاستمرار . نقول إن التابع $f(z)$ وحيد القيمة مستمر في النقطة $z = z_0$ إذا وفقط إذا كان $f(z_0)$ موجوداً ، وكان يوجد مقابل كل $0 < \epsilon$ عدد $\delta > 0$ بحيث

$$| f(z) - f(z_0) | < \epsilon$$

عندما $\delta > | z - z_0 |$. (2)

جوار النقطة z_0 هو مجموعة كل النقط z المحققة للمتراجحة $| z - z_0 | < \epsilon$ ، حيث ϵ عدد موجب .

الاستمرار المنتظم . إذا كان يوجد مقابل كل $0 < \epsilon$ عدد $0 < \delta$ مستقل عن قيمة z_0 في D بحيث تتحقق (2) فإن $f(z)$ مستمر بانتظام على D .

393. المشتق

مشتق التابع $f(z)$ بالنسبة لـ z في منطقة D هو التابع $f'(z)$ المعرّف في كل نقطة z_0 من D بالعلاقة

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \qquad (3)$$

نقول إن التابع وحيد القيمة $f(z)$ **تحليلي** (هولومورفي) في منطقة D إذا كان له مشتق في كل نقطة من D.

394. شرطا كوشي ريمان

إن الشرط اللازم ليكون

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

تحليلياً عن النقطة $z_0 = x_0 + i\,y_o$ ، هو أن يتحقق الشرطان التاليان عند النقطة z_0 .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4}$$

وعندئذٍ يُعطى مشتق التابع $f(z)$ بالعبارة

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y + iv_x = v_y - iu_y \tag{3'}$$

حيث $u_x = \partial u / \partial x$ و $u_y = \partial u / \partial y$ و . . .

أما إذا كانت المشتقات الواردة في (4) مستمرة جميعها في كل نقط منطقة D، فإن (4) تصبح الشرط اللازم والكافي ليكون التابع $f(z) = u + i\,v$ تحليلياً على D.

إن الشرط اللازم ليكون $u + i\,v$ تحليلياً في D هو يحقق التابعان u و v معادلة لابلاس في D ، أي

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

395. التكامل العقدي المحدَّد

لنأخذ منحنياً مستمراً C يصل بين النقطتين A و B . ولنفرض $z_0, z_1, \dots, z_n$ هي n نقطة مختلفة على C بحيث تنطبق z_0 على A و z_n على B . ولنفرض أن

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

هو تابع وحيد القيمة ومستمر في كل مكان من C . فإذا عرّفنا المجموع

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \cdot (z_k - z_{k-1}) \tag{6}$$

حيث ζ_k هي أي نقطة من C بين z_{k-1} و z_k وفرضنا أن δ هي أكبر قيمة لـ $|z_k - z_{k-1}|$. فإن التكامل العقدي على طول C هو

$$\lim_{\delta \to 0} S_n \equiv \int_C f(z)\, dz \tag{7}$$

إذا كان المنحني C معرفاً بالمعادلتين $x = \alpha(t),\ y = \beta(t)$ حيث α و β تابعان حقيقيان للمتغير الحقيقي t وقابلان للمفاضلة ، عندئذٍ

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{z_A}^{z_B} f(z)\, dz = \int_{t_A}^{t_B} (u + iv)[\alpha'(t) + i\beta'(t)]\, dt \tag{8}$$

لدينا هنا $dz = dx + i\,dy$ و z_A, z_B قيمتا z عند A, B على الترتيب و t_A, t_B قيمتا t الموافقتان .

396. الكنتورات (خطوط الكفاف)

ليكن $x = \alpha(t),\ y = \beta(t)$ مستمرين على المجال $a \leqq t \leqq b$ ، ولنفرض أن $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ لا يأخذان القيمة نفسها من أجل أي قيمتين مختلفين لـ t في

المجال $a < t < b$ ، فإن مجموعة النقط (x,y) الموافقة لجميع قيم t في المجال $[a,b]$ تسمى الكنتور البسيط C . ويكون C مغلقاً إذا كان $x(a) = x(b)$ وكان $y(a) = y(b)$.

397. نظرية كوشي التكاملية

إذا كان $f(z)$ تحليلياً في كل مكان على محيط وداخل منحنٍ بسيط مغلق (كنتور مغلق) C فإن

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

تعريف . نقول إن D هي **منطقة بسيطة الاتصال** إذا أمكن تقليص أي منحن مغلق واقع بكامله داخل D إلى نقطة على أن يبقى المنحني أثناء تقليصه واقعاً في D .

إذا كان $f(z)$ تحليلياً على كامل منطقة بسيطة الاتصال D وكان طريق المكاملة واقعاً بكامله في D ، فإن قيمة

$$\int_{z_A}^{z_b} f(z)\, dz$$

مستقلة عن الطريق وتتعلق فقط ببدايته ونهايته ، كما أن التابع

$$F(z) \equiv \int_{z_A}^{z} f(z)\, dz$$

تحليلي في D و $F'(z) = f(z)$. أما $F(z) + C$ فهو التكامل غير المحدد للتابع $f(z)$ ، حيث C ثابت اختياري .

398. صيغة كوشي التكاملية

ليكن $f(z)$ تحليلياً داخل وعلى منحنٍ بسيط مغلق (كنتور مغلق) C ، فإذا كانت z داخل C فإن

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z}\, dw \tag{9}$$

كما أن للتابع $f(z)$ مشتقات من جميع المراتب ... $f'(z), f''(z),$ تُعطى بالعلاقة

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\, dw \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

399. نظرية تايلور

إذا كان $f(z)$ تحليلياً على كامل منطقة D يحصرها منحن بسيط مغلق C وكانت z و a نقطتين داخل D فإن

$$f(z) \equiv f(a) + f'(a)(z - a) + \frac{f''(a)}{2!}(z - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z - a)^{n-1} + R_n \tag{11}$$

حيث

$$R_n = (z - a)^n P_n(z), \; P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\omega)}{(\omega - a)^n (\omega - z)}\, d\omega$$

كما أن $P_n(z)$ تحليلي على كامل المنطقة D .

400. سلسلة تايلور

تسمى السلسلة اللا منتهية

$$(12)\ f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \frac{f''(a)}{2!}(z - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \cdots$$

سلسلة تايلور . فإذا كان $a = 0$ فإن السلسلة (12) تسمى سلسلة ماك لوران .

401. نتائج إضافية

(a) تتقارب السلسلة (12) إلى القيمة $f(z)$ في كل نقطة z داخل أي دائرة C' يكون التابع $f(z)$ تحليلياً داخلها .

(b) إن **نصف قطر التقارب** R للسلسلة (12) هو المسافة d بين a وأقرب نقطة شاذة منها للتابع $f(z)$ ، أي أن (12) تتقارب من أجل جميع قيم z المحققة للمتراجحة

$$|z - a| < R = d$$

(c) يمكن إيجاد جميع المشتقات $f^{(n)}(z), n = 1, 2, \ldots$ للتابع $f(z)$ باشتقاق السلسلة (12) حداً حداً ويكون نصف قطر تقارب السلاسل الناتجة هو R ، كما أن هذه السلاسل تتقارب بانتظام في المنطقة المحددة بالمتراجحة

$$|z - a| \leqq R_1$$

حيث $R_1 < R$.

(d) إذا كان $|z - a| < d$ فإن $R_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ وتتقارب السلسلة (12) **إطلاقاً** .

(e) إذا كان R نصف قطر تقارب (12) وكان $|f(z)|$ لا يتجاوز M على طول محيط الدائرة

$$|z - a| = r$$

حيث $0 < r < R$ ، فإن

$$|f^{(n)}(a)| \leqq \frac{n!\,M}{r^n} \quad , n = 0, 1, 2, \ldots$$ (متراجحة كوشي)

(f) إذا كان $f(z)$ تحليلياً داخل القرص الدائري $|z - a| < r$ فإن $|f(z)|$ لا يتجاوز القيمة M في أي نقطة z داخل القرص ، حيث M هي القيمة العظمى لـ $|f(z)|$ على محيط القرص الدائري .

(g) الشرط اللازم والكافي للتعبير عن التابع $f(z)$ بسلسلة قوى صحيحة من الشكل (12) هو أن يكون هذا التابع تحليلياً في منطقة ما . ونقول في هذه الحالة أننا **نشرنا** التابع في هذه المنطقة .

(h) ليكن $f(x)$ تابعاً حقيقياً للمتغير x ، وقابلاً للنشر في سلسلة تايلور

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$

المتقاربة إلى $f(x)$ في المجال $a - R < x < a + R$. عندئذٍ فإن السلسلة

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

التي نحصل عليها بوضع z بدلاً من x تتقارب على كامل الدائرة C التي نصف قطرها R ومركزها a إلى تابع وحيد $f(z)$ تحليلي داخل C ، ويتطابق مع $f(x)$ في مجال على المحور x حول a .

402. نظرية ليوفيل

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً ومحدوداً في جميع نقط المستوي العقدي المحدودة (أي ما عدا النقطة اللا نهائية) فإنه يكون ثابتاً .

403. أصفار تابع تحليلي

نقول إن للتابع $f(z)$ صفراً من المرتبة m عند $z = a$ إذا كان

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \qquad f^{(m)}(a) \neq 0$$

404. نظرية لورنت

إذا كانت التابع $f(z)$ تحليلياً داخل وعلى حدود حلقة مستوية T محصورة بين دائرتين C_1 و C_2 لهما المركز نفسه $z = a$ ، فإنه يمكن أن نكتب من أجل أي نقطة z من T العبارة

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (z-a)^n \tag{13}$$

حيث

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\omega)\, d\omega}{(\omega - a)^{n+1}} \tag{14}$$

و Γ هي أي دائرة داخل T مركزها $z = a$.

405. النقط الشاذة (المفردة ، المنفردة)

نقول إن z_0 هي **نقطة شاذة** للتابع $f(z)$ إذا لم يكن $f(z)$ قابلاً للاشتقاق عند z_0 ، **أو** إذا كان يوجد نقطة z_1 مختلفة عن z_0 في كل جوار (قرص مركزه z_0) لـ z_0 ، لا يكون التابع قابلاً للإشتقاق عندها . (أي عند z_1) .

النقطة الشاذة المنعزلة . إذا كان يوجد جوار للنقطة z_0 يكون فيه التابع تحليلياً ما عدا النقطة z_0 فإن z_0 تسمى نقطة شاذة منعزلة .

النقطة الشاذة القابلة للإزالة

نقول إن a نقطة شاذة قابلة للإزالة للتابع $f(z)$ إذا أمكن جعل هذا التابع تحليلياً عند a وذلك بإعادة تعريف $f(z)$ عند $z = a$.

القطب . نقول إن للتابع $f(z)$ قطباً عند $z = a$ إذا كانت a نقطة شاذة للتابع $f(z)$ وكان $1 / f(z)$ تحليلياً عند a .

نقطة الشذوذ الأساسي . نقول إن $z = a$ هي نقطة شذوذ أساسي للتابع $f(z)$ إذا كانت $z = a$ نقطة شاذة غير قابلة للإزالة ولم تكن قطباً له .

406. خواص إضافية

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في المنطقة الحلقية المحصورة بين دائرة خارجية C_2 وأخرى داخلية C_1 نختارها صغيرة بقدر كافٍ ، فإنه يمكن التعبير عن هذا التابع بواسطة نظرية لورنت بالعلاقة

$$(15)\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^{-n}$$

$$0 < |z-a| < R$$

(a) إذا كانت جميع الأمثال b_n مساوية للصفر فإن السلسلة المتبقية في (15) تحليلية وتمثل $f(z)$ داخل C_2 ، أي من أجل $|z - a| < R$ ما عدا $z = a$ أحياناً .

(b) إذا احتوت السلسلة الثانية (ذات القوى السالبة) في (15) عدداً منتهياً من الحدود ، وكان آخر حد هو $b_m (z - a)^{-m}$ (أي $b_n = 0$ من أجل $n > m$) فإننا نقول إن للتابع $f(z)$ **قطباً من المرتبة** m عند $z = a$.

فإذا كان $m = 1$ نقول إن $z = a$ هو **قطب بسيط** للتابع $f(z)$.

ونسمي السلسلة المنتهية $\sum_{n=1}^{m} b_n (z - a)^{-n}$ **الجزء الرئيسي** للتابع $f(z)$ عند $z = a$.

(c) إذا كانت السلسلة الثانية في (15) غير منتهية ، فإن هذه السلسلة تتقارب من أجل جميع قيم z ما عدا $z = a$ التي تمثل عندئذٍ **نقطة شذوذ أساسي** للتابع $f(z)$.

407. الشذوذ في اللا نهاية

نقول إن للتابع $f(z)$ **قطباً من المرتبة** m **في اللا نهاية** أي في النقطة $z = \infty$ إذا كان للتابع $f(1/\zeta) \equiv \varphi(\zeta)$ قطب من المرتبة m في النقطة $\zeta = 0$. ويكون للتابع $f(z)$ شذوذ أساسي عند $z = \infty$ إذا كان للتابع $\varphi(\zeta)$ شذوذ أساسي عند $\zeta = 0$.

نظريات . **(a)** إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في كل مكان من المستوي العقدي بما فيه $z = \infty$ فإن $f(z) = c$ ، c ثابت .

(b) إذا لم يكن للتابع $f(z)$ أي نقط شذوذ سوى الأقطاب فإن $f(z)$ **كسري** . (أي يكتب على شكل نسبة كثيري حدود) .

(c) لا يكون للتابع الكسري نقط شذوذ سوى الأقطاب .

408. التابع الكامل

هو تابع $f(z)$ تحليلي في كل مكان من المستوي العقدي ما عدا $z = \infty$.

409. الرواسب

نسمي العدد b_1 في (15) أي أمثال $1/(z-a)$ **راسب التابع** $f(z)$ **بالنسبة لـ** $z = a$. ونعرّف راسب التابع $f(z)$ بالنسبة لـ $z = \infty$ بأنه $-b_1$.

ملاحظة . يعود سبب تسميتنا هذه لـ b_1 إلى أنه عند مكاملة جميع حدود السلسلة (15) على دائرة مركزها a في المنطقة الحلقية ، فإن تكاملات جميع الحدود تساوي الصفر وفق نظرية كوشي ولا يبقى (لا يرسب) إلا b_1 .

نظريات . (a) إذا كانت $z = a$ نقطة شذوذ منعزلة للتابع $f(z)$ التحليلي في جوار $z = a$ ، فإن يمكن نشر هذا التابع بصيغة مماثلة لـ (15) ويكون راسب هذا التابع بالنسبة لـ $z = a$ مساوياً للصفر أي

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = 0 \tag{16}$$

حيث C هي دائرة مركزها $z = a$ ولا تحتوي على أي نقطة شذوذ أخرى للتابع $f(z)$.

(b) إذا كان $z = a$ قطباً بسيطاً للتابع $f(z)$ فإن راسب هذا التابع بالنسبة لـ $z = a$ هو

$$b_1 = \lim_{z \to a} (z - a) f(z)$$

(c) إذا كان $z = a$ قطباً من المرتبة m للتابع $f(z)$ فإن الراسب هو

$$b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]_{z=a} \tag{17}$$

(d) إذا كان $f(z)$ تحليلياً في كل نقطة داخل وعلى منحنٍ مغلق بسيط C ما عدا عدداً منتهياً من نقط الشذوذ $z_1, z_2, \ldots, z_n$ المتوضعة داخل C فإن

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \left(\sum_{i=1}^{n} R_i \right) \tag{18}$$

حيث R_i هو راسب التابع $f(z)$ بالنسبة لـ z_i .

410. التطبيق المحافظ

يعرّف التابع $f(z)$ تقابلاً بين نقط المستوي Z والمستوي W . فإذا تجولت z على مجموعة نقط S_z في المستوي Z ، فإن w تتجول على مجموعة S_w في المستوي W . ونقول إن S_z طُبِّقت على S_w .

نقول إن التطبيق هو واحد لواحد (تقابل) إذا كان يوجد مقابل كل z من S_z قيمة واحدة w عبر $f(z)$ ، كما أن التابع العكسي $z = F(w)$ يقابل كل قيمة w من S_w بقيمة واحدة z من S_z .

نظرية . الشرط الكافي ليكون $w = f(z)$ تقابلاً بين مجموعة نقط S_z و S_w هو أن يكون $f(z)$ تحليلياً و $f'(z) \neq 0$ على S_z .

ليكن C_1 , C_2 منحنيين في المستوي Z متقاطعين في P_0 بزاوية α . ولنفرض أن $w = f(z)$ يقابل C_1 , C_2 بمنحنيين Γ_1 , Γ_2 في المستوي W كما ينقل P_0 إلى Q_0 في W . فإذا كانت الزاوية بين Γ_1 و Γ_2 عند Q_0 هي α **فالتطبيق متزاوٍ** أي محافظ على الزوايا . إذا كانت جهة دوران مماس C_1 للانطباق على C_2 هي نفس جهة دوران مماس Γ_1 للانطباق على Γ_2 وبقيت الزاوية α على حالها ، قلنا إن **التطبيق محافظ** .

نظرية . يكون $w = f(z)$ تطبيقاً محافظاً إذا كان $f(z)$ تحليلياً و $f'(z) \neq 0$ على S_z التي تحتوي P_0 .

411. تابع المقياس

نفرض أن P و P_0 على المنحني C_1 في المستوي Z تنتقل إلى Q و Q_0 على Γ_1 . فإذا كان Δs طول القوس P_0P على C_1 و $\Delta \sigma$ هو طول القوس الموافق Q_0Q على Γ ، كما أن $|\Delta z|$ و $|\Delta \omega|$ هما طولا وتري P_0P و Q_0Q ، وإذا كان $f(z)$ تحليلياً في المجموعة S_z فإن

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)|$$

ونسمي $\rho \equiv |f'(z_0)|$ **تابع المقياس** للتابع f عند z_0 . ونقول إن ρ هي **نسبة التكبير** .

412. التوابع البسيطة الأساسية

نعرّف **التابع اللوغاريتمي** بالعلاقة

$$\log z = \int_C \frac{dt}{t} = \int_{t=1}^{t=z} \frac{dt}{t}$$

حيث C هو أي طريق في المستوي العقدي لا يمر عبر المبدأ ويصل النقطة $t = 1$ إلى النقطة $t = z$.

$$\log z = \ln z + i(2k\pi) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1}$$

وبما أن للتابع اللوغاريتمي لا نهاية من القيم المقابلة لـ z فإننا نعرّف **القيمة الرئيسية** لهذا التابع بالعلاقة

$$\ln z \equiv \ln |z| + i\theta \qquad -\pi < \theta \leqq \pi$$

حيث θ هي القيمة الرئيسية الحقيقية بالراديان للعدد z .

ويتم تعيين القيمة الرئيسية $\ln z$ كما يلي : نُحدِث شقاً على طول الجزء السالب للمحور $o\,x$ ، ونشترط عدم مرور طريق المكاملة (الذي نعرف $\log z$ على أساسه) عبر هذا الشق . فإذا جعلنا z تصل إلى الشق من الأعلى فإن الجزء التخيلي لـ $\ln z$ هو πi ، أما إذا جعلنا z تصل إلى الشق من الأسفل فإن الجزء التخيلي لـ $\ln z$ هو $-\pi i$ (لاحظ أن $\ln 1 = 0$) .

ويحقق التابع اللوغاريتمي الخاصة

$$\log z_1 + \log z_2 = \log (z_1 z_2) \tag{2}$$

حيث تكون كل قيمة لأحد طرفي (2) هي واحدة من قيم الطرف الآخر .

التابع الأسي . هو بالتعريف $z \equiv \exp w$ التابع المعاكس للتابع $w = \log z$. حيث w هو تابع وحيد القيمة ويحقق المعادلة التفاضلية

$d\,w = d\,z\,/\,z$ ويكون $w = 0$ عندما $z = 1$ ، كما أن

$$\exp w = 1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \cdots + \frac{w^n}{n!} + \cdots$$

تتقارب من أجل $| w | < \infty$

وبالتعريف نكتب $e \equiv exp\ 1$. وهكذا فإن $1 = \ln e$.

كما نكتب $exp\ w$ عموماً بالشكل e^w . وتتحقق الخاصة

$$exp\ w_1 \,.\, exp\ w_2 \equiv exp\ (w_1 + w_2)$$

إذا كان $w = u + i\,v$ فإن

$$\exp (u + iv) = \exp u \cdot \exp iv$$
$$\exp iv = \cos v + i \sin v$$

التوابع المثلثية

علاقتا أويلر :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\,i}$$

ويتم تعريف التوابع المثلثية $\sin z, \cos z, tg\ z, \ldots$ على النحو التالي

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos x\ ch\ y - i \sin x\ sh\ y$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\,i} = \sin x\ ch\ y + i \cos x\ ch\ y$$

وهكذا يمكن البرهان على أن $cos^2 z + sin^2 z = 1$.

وتبقى صيغ إشتقاق التوابع المثلثية الحقيقية صحيحة من أجل اشتقاق التوابع المثلثية العقدية . مثلاً

$$\frac{d\ (sin\ w)}{d\ z} = cos\ w \left(\frac{d\ w}{d\ z} \right)$$

(انظر 72 و 108) .

قانون دي موافر. ليكن

$$z = \rho\ (Cos\ \theta + i\ Sin\ \theta) = x + i\ y$$

فإن

$$z^n = \rho^n\ (cox\ n\ \theta + i\ sin\ n\ \theta)$$

413. التوابع كثيرة القيم

إن التابع

$$w \equiv log\ z = ln\ |z| + i\ (\theta + 2\ k\ \pi)$$

هو مثال واضح على تابع لـ z له لا نهاية من القيم المقابلة لـ z . وتوافق كل قيمة لـ k ما نسميه **فرعاً للتابع** $log\ z$. وعندما ترسم z دائرة حول المبدأ فإن w تنتقل من فرع لآخر . ونسمي بشكل عام النقطة $z = a$ **نقطة تفرع** لتابع كثير القيم $w = f(z)$ ، إذا كانت $z = a$ نقطة شاذة للتابع $f(z)$ وكان دوران z حول المبدأ في المستوي Z يوافق انتقال w من فرع لآخر للتابع $f(z)$.

مثال آخر للتابع كثير القيم هو التابع $w = z^{1/n}$ ، حيث n عدد صحيح ، وهو يأخذ n قيمة مقابلة لقيمة واحدة لـ z ، إذ لو وضعنا $z = r\ e^{i\theta}$ لوجدنا أن

$w = r^{1/n} e^{i\psi}$ ، حيث $\psi \equiv (\theta + 2k\pi)/n$ و $r^{1/n}$ هو الجذر الموجب من المرتبة n للعدد الحقيقي r .

وهذا التابع يمكننا من إيجاد جميع جذور الأعداد العقدية ، أذ لو أردنا إيجاد الجذور الخمسة للعدد $32 -$ فإننا نكتب

$$z^5 = -32 = 32\, e^{i\pi}$$

وبالتالي $z = \sqrt[5]{32}\; e^{i\psi}\ ,\ \psi = (\pi + 2k\pi)/5$

وباعطاء k القيم من 0 إلى 4 نحصل على الجذور الخمسة . فإذا أعطينا k القيمة 5 عدنا إلى الجذر الموافق لـ $k = 0$.

ويمكن تمثيل هذه الجذور بنقط على محيط دائرة نصف قطرها 2 وموزعة بحيث تحدّ أقواساً متساوية ابتداءً من

$$. \; z_1 = 2\, e^{\pi/5}$$

22. الاحتمالات والاحصاء

414. أساسيات في الاحتمالات

فضاء العينة Ω . هو مجموعة جميع النتائج الممكنة لتجربة ما . وهكذا فإن {طرة ، نقش} هو فضاء عينة تجربة رمي قطعة نقد .

الحادث E . هو مجموعة جزئية من فضاء العينة . ونقول إن الحادث قد وقع (حَدَث) إذا حصلنا بنتيجة التجربة على عنصر ينتمي إلى E .

الحادث الأكيد . هو المجموعة Ω أي فضاء العينة ، وهو يقع دوماً بنتيجة اجراء التجربة .

الحادث المستحيل . هو المجموعة ϕ أو أي مجموعة L لا تشترك مع Ω بأي عنصر أي هو تلك المجموعة المحققة للعلاقة

$$\Omega \cap L = \varnothing$$

وطالما أن وقوع أي حادث E غير الحادث المستحيل والحادث الأكيد هو أمر ممكن فإننا نعبر عن إمكانية الوقوع هذه بعدد نسميه احتمال وقوع E ونرمز له بـ $P(E)$.

ومن البديهي أن يكون

$$0 \leqq P(E) \leqq 1$$

حيث $P(\Omega) = 1$ و $P(\varnothing) = 0$ بالتعريف .

ملاحظة بما أننا عبّرنا عن الحادث بالمجموعة E فإن قواعد المجموعات والعمليات عليها تبقى صحيحة من أجل الحوادث المختلفة ، حيث نعرّف **الحادث المتمم** بأنه $\overline{E} = \Omega - E$ ونعرّف تقاطع حادثين وفرق حادثين ومجموع حادثين . . . .

الاحتمال . إذا كان عدد عناصر فضاء العينة (أي عدد الحالات الممكنة كنتيجة لتجربة ما) هو n فإن احتمال وقوع الحادث E الذي عدد عناصره m (عدد الحالات المواتية) هو

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

ويسمى هذا **بالتعريف الحدسي للاحتمال** .

التعريف الإحصائي للاحتمال . إذا وقع الحادث E ، h مرة عند اجراء تجربة n مرة فإن احتمال وقوع E هو

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{h}{n}$$

لاحظ هنا أن h متعلقة بـ n .

احتمال الحادث المتمم $\overline{E}$ هو

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

الحادثان المتنافيان نقول عن حادثين A و B أنهما متنافيان إذا استحال وقوعهما معاً أي إذا كان $A \cap B = \varnothing$.

قاعدة جمع الاحتمالات (1) إذا كانت الحوادث $E_1, E_2, \ldots, E_n$ متنافية مثنى مثنى أي أن $E_i \cap E_j = \varnothing$ من أجل $i \neq j$ فإن

$$P (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P (E_1) + P (E_2) + \ldots + P (E_n)$$

الحادثان المستقلان . نقول إن A و B حادثان مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يزيد أو يُنقص من احتمال وقوع الآخر .

جداء الاحتمالات (1) إذا كانت الحوادث $E_1, E_2, \ldots, E_n$ مستقلة فإن

$$P (E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = P (E_1) . P (E_2) \ldots . P (E_n)$$

قاعدة جمع الاحتمالات (2) إذا كان A و B حادثين غير متنافيين أي أن $A \cap B \neq 0$ فإن

$$P (A \cup B) = P (A) + P (B) - P (A \cap B)$$

لاحظ أن هذه القاعدة تحتوي القاعدة (1) .

الاحتمال الشرطي نسمي احتمال وقوع الحادث B علماً بأن الحادث A قد وقع ونرمز له بـ $P (B / A)$ بالاحتمال الشرطي لـ B علماً بأن A قد وقع .

جداء الاحتمالات (2) إذا لم يكن الحادثان A و B مستقلين فإن

$$P (A \cap B) = P (A) P (B/A) = P (B) P (A/B)$$

يكون الحادثان A و B مستقلين إذا وفقط إذا كان

$P (A/B) = P (A)$ أو $P (B/A) = P (B)$

إذا كانت الحوادث $E_1, E_2, \ldots, E_n$ مستقلة فإن احتمال عدم وقوع أيٍ منها هو

$$P_n = \left[1 - P (E_1) \right] \left[1 - P (E_2) \right] \ldots \left[1 - P (E_n) \right]$$

كما أن احتمال وقوع واحد على الأقل منها هو

$$P_0 = 1 - P_n$$

جداء الاحتمالات (3) إذا لم تكن الحوادث A, B, C مستقلة فإن

$$P (A \cap B \cap C) = P (A) . P (B/A) . P (C / A \cap B)$$

قانون الاحتمال الكلي . إذا كان الحادث E يقع عندما يقع واحد فقط من الحوادث المتنافية $E_1, E_2, \ldots, E_n$ فإن

$$P (E) = P (E_1) P (E / E_1) + P (E_2) P (E / E_2) + \ldots + P (E_n) P (E / E_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P (E_i) P (E / E_i)$$

دستور بايز (احتمال السبب) إذا كانت الحوادث $E_1, E_2, \ldots, E_n$ متنافية ، وكان E يقع بوقوع واحد فقط من هذه الحوادث فإن احتمال وقوع E_i علماً بأن E قد وقع يعطى بعلاقة بايز

$$P (E_i / E) = \frac{P (E_i) P (E / e_i)}{\sum_{i=1}^{n} P (E_i) P (E / E_i)}$$

415. طرائق العد

القاعدة الأساسية في العد . إذا كان عدد النتائج الممكنة لتجربة A هو n_1 وعدد النتائج الممكنة لتجربة B هو n_2 ، وعدد النتائج الممكنة لتجربة ثالثة C هو n_3 وهكذا . . . فإن عدد النتائج الممكنة لهذه التجارب عند اجرائها معاً هو حاصل الضرب $n_1 . n_2 . n_3 ...$

العينات . إذا كان لدينا مجموعة مكونة من n عنصراً واخترنا منها مجموعة من العناصر $x_1, x_2, ..., x_r$ (ليس بالضرورة مختلفة) فإن هذه المجموعة تسمى **العيِّنة** . ونكتب

$$S = (x_1 , x_2 , ... , x_r)$$

التبديل هو عنية مرتّبة نأخذ فيها الترتيب بعين الاعتبار أي أن العينة تختلف عن الأخرى إذا اختلف موقع أحد عناصرها على الأقل أو إذا اختلف عنصر منها عن الأخرى .

التوافق . هو عينّة لا نأخذ فيها الترتيب بعين الاعتبار ، أي أن العينة تختلف عن الأخرى إذا اختلف عنصر منها عن الأخرى .

مثال لتكن لـدينا مجموعة الأرقام $\{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ فإن كل عدد مكون من ثلاثة أرقام يمكن تشكيله من هذه المجموعة هو تبديل ، حيث نلاحظ أن التبديل 123 يختلف عن 213 .

وندرك هنا أن عدد التباديل الممكنة عند عدم السماح بتكرار الرقم ، يختلف عنه عند السماح بالتكرار .

مثال نأخذ مجموعة الأرقام $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، إن كل مجموعة جزئية مكونة من ثلاثة عناصر (أرقام) هي توافق ، إذ أن $\{3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$ بينما $\{1, 2, 5\} \neq \{1, 2, 3\}$

وهنا أيضاً يختلف عدد التوافقات الممكنة عند السماح بتكرار الرقم ، عن عدد التوافقات عند عدم السماح بالتكرار .

في الجدول التالي نبين عدد التباديل والتوافقات في جميع الحالات .

جدول عدد التباديل والتوافقات

عدد العناصر المختلفة		بدون تكرار	مع تكرار
التوافقات	مأخوذة k في كل مرة	$\binom{n}{k}$	$\begin{matrix} n+k-1 \\ k \end{matrix}$
	مأخوذة جميعها كل مرة	$\binom{n}{n} = 1$	$\begin{matrix} 2n-1 \\ n \end{matrix}$
التباديل	مأخوذة k في كل مرة	$n(n-1) \ldots (n-k+1)$	n^k
	مأخوذة جميعها كل مرة	$n!$	n^n

الرمز $\binom{p}{q}$ هو اصطلاح نعرّفه كما يلي : ليكن q , p عددين صحيحين فإن

$$\binom{p}{q} = \frac{P\,(p-1)\,(p-2)\,\ldots\,(p-q+1)}{q\,!} =$$

$$= \frac{p\,!}{q\,!\,(p-q)\,!}$$

ونصطلح على

$$\binom{p}{0} = 1 \,,\; 0\,! = 1$$

نظرية لدينا n من الأشياء التي تحوي عناصر متشابهة عددها n_1 من النوع (1) وعناصر متشابهة عددها n_2 من النوع (2) ، وهكذا . . . n_k من النوع (k) بحيث

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

إن عدد تباديلَ هذه الأشياء مأخوذة جميعها بوقت واحد هو

$$N = \frac{n\,!}{n_1\,!\; n_2\,!\;\ldots\; n_k\,!}$$

إن هذا العدد N يشير أيضاً إلى عدد طرائق تقسيم n شيئاً مختلفاً إلى k مجموعة تحوي الأولى n_1 عنصراً والثانية n_2 عنصراً . . . وهكذا حتى n_k .

علاقات خاصة بالرمز $\binom{p}{q}$

$$\binom{p}{q} = \binom{p}{p-q}$$

$$\binom{p+1}{q} = \binom{p}{q} + \binom{p}{q-1}$$

$$\binom{p}{0} + \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \dots + \binom{p}{p} = 2^n$$

$$\binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \dots + (-1)^p \binom{p}{p} = 0$$

416. التوزيعات التكرارية

لتكن $x_1, x_2, \dots, x_k$ مجموعة من الأعداد (متحولات ، مشاهدات ، قياسات) تظهر بتكرارات (عوامل تَوْزين) $f_1, f_2, \dots, f_k$ على الترتيب ، بحيث $f_i \geqq 0$ من أجل $i = 1, 2, \dots, k$ و $x_1 < x_2 < \dots < x_k$.

التوزيع التكراري هو المجموعة $x_1, x_2, \dots, x_k$ مع تكراراتها .

المتوسط الحسابي الموزّن (المتوسط الموزّن) هو

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

حيث $n = f_1 + f_2 + \dots + f_k$ هو الوزن (مجموع التكرارات) الكلي .

مدى التوزيع (المدى) لمجموعة من القياسات $x_1, x_2, \dots, x_k$ هو الفرق بين أكبر قياس وأصغر قياس (بالقيمة المطلقة) .

المخطط التكراري (المضلع التكراري) هو الخط المنكسر الذي يبدأ من النقطة (x_1, f_1) ثم (x_2, f_2) ثم . . . (x_k, f_k) .

التكرار المتجمع . بالنسبة لـ x_j هو المجموع $f_1 + f_2 + \dots + f_j$ الذي نرمز له أيضاً له

$$F_j = \sum_{i=1}^{j} f_i \equiv cum\ f|_j$$

حيث F_j هو عدد القياسات التي قيمتها أصغر أو تساوي x_j .

المنحني التكراري المتجمع . هو المنحني الذي يبدأ بالنقطة (x_1, F_1) فالنقطة (x_2, F_2) . . . فالنقطة (x_k, F_k) .

417. تصنيف البيانات (المعطيات)

إذا كان عدد المعطيات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ كبيراً جداً فإن من الصعب استيعاب هذه المعطيات وتكوين فكرة عنها . ونلجأ عادة لتكوين فكرة عن المعطيات إلى تقسيم **المدى** إلى مجالات متساوية نسميها **مجالات الصنف** عددها k وطول كلٍ منها يساوي c ، ويتم اختيار هذه المجالات بحيث يكون لكلٍ منها نقطة منتصف مناسبة نسميها **علامة الصنف** أو **قيمة المنتصف** أو **مركز الفئة** .

ويتم ترقيم ترتيب مجالات الصنف بالأعداد $1, 2, \ldots, k$ التي يوافقها $f_1, f_2, \ldots, f_k$ تكرارات الأصناف .

الجدول 1 . 22

الوسطاء الإحصائية للتوزيعات التكرارية المتقطعة

قياسات موقع تمركز التوزيع

الوزن الكلي $$n = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

المتوسط الحسابي الموزَّن $$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

انحراف (خطأ) x_i بالنسبة لـ $\overline{x}$ $$x_i - \bar{x}$$

القيمة المطلقة لانحراف x_i بالنسبة لـ $\overline{x}$ $$|x_i - \bar{x}|$$

جذر متوسط المربعات (*rms*) لـ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i x_i^2}{n} \right)^{1/2}$

المنوال Mode (M_O) لمجموعة من القياسات هو قيمة x_i التي لها أكبر تكرار .

الأوسط Median لمجموعة من القياسات المرتبة تصاعدياً (أو تنازلياً) هو القيمة الواقعة في وسط التوزيع (إذا كان عدد عناصر المجموعة فردياً) والمتوسط الحسابي للقيمتين الواقعتين في وسط التوزيع (إذا كان عدد عناصر المجموعة زوجياً) .

العزوم

العزم الرائي حول $x = x_0$	$\mu_r(x_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - x_0)^r$
متوسط مربعات الانحرافات عن x_0	$\mu_2(x_0)$
جذر متوسط مربعات الانحرافات عن x_0	$\sqrt{\mu_2(x_0)}$
العزم الرائي حول $x = 0$	$\nu_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^r$
العزم المركزي الرائي حول المتوسط الموزّن $\overline{x}$	$\mu_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^r$
التباين ، العزم الثاني حول المتوسط	$\sigma^2 = \mu_2 = \nu_2 - \bar{x}^2$
الانحراف المعياري	$\sigma = \sqrt{\mu_2}$
العزم الرائي في الوحدات النموذجية t حول $t = 0$	$\alpha_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i t_i^r$ (حيث $t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$)
العزم الرائي المطلق حول x_0	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i \lvert x_i - x_0 \rvert^r$
الانحراف المتوسط عن x_0	$\mathrm{MD}\vert_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i \lvert x_i - x_0 \rvert$
الانحراف المتوسط المطلق عن المتوسط ، الخطأ المطلق المتوسط	$\mathrm{MD} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$

قياسات التخالف والتفلطح

γ_1 = أمثال التخالف $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \alpha_3$

التخالف العزمي $\frac{\mu_3}{2\sigma^3}$

γ_2 = أمثال الفائض (الانبساط) $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \alpha_4 - 3$

β_2 = التفلطح ، الانبساط $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \gamma_2 + 3 = \alpha_4$

مقاييس التشتت

لتكن لدينا مجموعة من القياسات المرتبة $x_1 > x_2 > \ldots > x_k$ و $f_1, \ldots, f_k$ هي تكرارات هذه القياسات ، $\overline{x}$ هو المتوسط و σ الانحراف المعياري . ليكن

$$m = \sum_{n=1}^{k} f_i \qquad \text{و} \qquad cum\ f\,|_j = \sum_{i=1}^{j} f_i$$

عندما نرسم $cum\ f\,|_j$ كتابع لـ x فإن أكبر قيمة x_j يتحقق من أجلها $cum\ f\,|_j \leqq p/100$ تسمى **المثيني** من المرتبة p .

الرُّبيع (الأول) الأدنى Q_1 هو المثيني الخامس والعشرون .
الرُّبيع (الثاني) الأوسط Q_2 هو المثيني الخمسون .
الرُّبيع (الثالث) الأعلى Q_3 هو المثيني الخامس والسبعون .
نصف المدى الربيعي Q هو $Q = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

إن التباين σ^2 والانحراف المعياري σ هما قياسان للتشتت أيضاً .

أمثال التغير V تعرّف بالعلاقة $V = \sigma / \overline{x}$ أو $100\ \sigma / \overline{x}$ بالمئة .

418. التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

بفرض أن X تأخذ فقط القيم المتقطعة $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ، حيث $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. ولنفرض أن احتمال أن تأخذ X القيمة x_i هو

$$P[X = x_i] = f(x_i) \qquad i = 1, \ldots, k$$

فإن

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i) = 1$$

أما احتمال أن تكون $X \leqq x'$ فهو

$$P[X \leqq x'] = \sum_{i=1}^{i=j} f(x_i) = F(x')$$

حيث x_j هي أكبر قيمة للمتغير X وتحقق المتراجحة $x_j \leqq x'$.

ونسمي $F(x')$ **الاحتمال المتقطع المتجمع** . كما يكون $F(x_k) = 1$.

أما احتمال أن يكون $x' \leqq X \leqq x''$ فهو

$$P[x' < X \leqq x''] = F(x'') - F(x')$$

يمكن وصف **التوزيع المتقطع** $f(x)$ بوسطاء مشابهة لتلك المعطاة في الجدول 22.1 ، ويُعطى المتوسط μ والتباين σ^2 لـ X بالشكل

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i f(x_i)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 f(x_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$

إن التوزيعات الاحتمالية وتوزيعات تكرار العينة متشابهة بالشكل ، حيث $f(x_i)$ تقابل f_i / n .

التوقع الرياضي ليكن $g(x)$ تابعاً للمتغير الصُّدْفي المتقطع X ، ولنفرض أن $f(x)$ هو التوزيع الاحتمالي لـ x . فإن القيمة المتوقعة (قيمة المتوسط) لـ $g(x)$ تُعطى كما يلي :

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{k} g(x_i)f(x_i)$$

ونلاحظ أن المتوسط μ هو التوقع الرياضي $E[X]$ لـ X .

نعرّف العزم الرائي μ_r حول المتوسط μ بالعلاقة

$$E[(X - \mu)^r] = \mu_r = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^r f(x_i)$$

أما تباين X فهو $\mu_2 = \sigma^2$ ، كما أن σ هو الانحراف المعياري لـ X .

419. التوزيع الاحتمالي المستمر

ليكن X متغيراً صُدْفياً يقع حتماً في المجال (α, β) . **تابع التوزيع المتجمع المستمر** $F(x)$ هو تابع يعطي احتمال أن يكون X أقل أو يساوي أي قيمة خاصة x معطاة سلفاً أي أن

$$P[X \leqq x] = F(x)$$

ونسمي $F(x)$ **تابع احتمال** X . واحتمال أن يكون $x' \leqq X \leqq x''$ هو

$$P[x' < X \leqq x''] = F(x'') - F(x')$$

إذا كان $F'(x)$ مشتق التابع $F(x)$ بالنسبة لـ x موجوداً ، فإن $f(x) = F'(x)$ هو تابع الكثافة الاحتمالية المستمر (تابع التكرار ، التوزيع) ويكون

$$P[x' < X \leqq x''] = \int_{x'}^{x''} f(x)\,dx = F(x'') - F(x')$$
$$F(x') = \int_{\alpha}^{x'} f(x)\,dx = P[X \leqq x']$$
$$F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 1 \qquad F(\alpha) = 0 \qquad 0 \leqq F(x) \leqq 1$$

ويمكن وصف الملامح الرئيسية لتابع الكثافة الاحتمالية $f(x)$ من خلال وسطاء مشابهة لتلك المعطاة في التوزيعات المتقطعة .

وهكذا فإن المتوسط μ والتباين σ^2 للمتغير X تُعطى بالشكل

$$\mu = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)\,dx$$
$$\sigma^2 = \int_{\alpha}^{\beta} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)\,dx - \mu^2$$

التوقع الرياضي . ليكن $g(x)$ تابعاً للمتغير المستمر X ، ولنفرض أن X تخضع للتوزيع الاحتمالي $f(x)$ وتقع حتماً في المجال (α,β) ، فإن القيمة المتوقعة (قيمة المتوسط) لـ $g(x)$ هي

$$E[g(X)] = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)f(x)\,dx$$

لاحظ أن المتوسط μ هو التوقع الرياضي $E[x]$ للمتغير X .

أما العزم الرائي μ_r للتوزيع حول المتوسط μ فهو

$$E[(X-\mu)]^r = \mu_r = \int_{\alpha}^{\beta} (x-\mu)^r f(x)\,dx$$

$\mu_2 = \sigma^2$ هو التباين و σ هو الانحراف المعياري .

420. التوزيع الثنائي

إذا كان X متغيراً عشوائياً وكان احتمال أن يأخذ X القيمة x هو

$$P[X = x] = f(x) = C_x{}^n p^x q^{n-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, n \qquad (1)$$

حيث

$$q = 1 - p \qquad\qquad C_x{}^n = \frac{n!}{x!(n-x)!} \equiv \binom{n}{x}$$

فإن X تخضع لما نسميه **التوزيع الاحتمالي الثنائي** .

أما احتمال أن يكون $X \leqq x'$ حيث x' هي أي قيمة تحقق المتراجحة $x' \leqq n$ فهو

$$P[X \leqq x'] = F_B(x') = C_0{}^n p^0 q^n + C_1{}^n p^1 q^{n-1} + \cdots + C_{x^*}{}^n p^{x^*} q^{n-x^*}$$

حيث x^* هو أكبر عدد صحيح لا يتجاوز x' .

ويكون الحد الذي رقمه $x + 1$ في منشور ثنائي الحد

$$(q + p)^n = q^n + C_1{}^n p q^{n-1} + \cdots + C_x{}^n p^x q^{n-x} + \cdots + p^n$$

هو الطرف الأيمن للعلاقة (1) .

الخواص . إذا خضع المتغير X للتوزيع الثنائي (1) فإن

متوسط التوزيع $= \mu = np$

التباين $= \sigma^2 = npq$

الانحراف المعياري $= \sigma = \sqrt{npq}$

أمثال التخالف $= \gamma_1 = \dfrac{q - p}{\sqrt{npq}}$

أمثال الفائض = $\gamma_2 = \dfrac{1 - 6pq}{npq}$

المنوال هي قيمة (قيم x) الموجبة الصحيحة المحققة للمتراجحتين

$$np - q \leqq x \leqq np + p$$

العزم الرائي μ_r حول المتوسط μ :

$$\mu_1 = 0 \qquad \mu_2 = \sigma^2 = npq \qquad \mu_3 = npq(q - p)$$
$$\mu_4 = npq[1 + 3(n - 2)pq]$$

يعطي التوزيع الاحتمالي الطبيعي (انظر 423) تقريباً جيداً للتوزيع الثنائي عندما تكون n كبيرة بقدر كافٍ . ولإيجاد منحنٍ طبيعي ملائم $y = \psi(t) / \sigma$ حيث $\psi(t) = (1/\sqrt{2\pi})\ exp[-t^2/2]$

للتوزيع الثنائي $f(x) = C_x^n\ p^x\ q^{n-x}$ ، نضع $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$ و

$$t = (x - \mu) / \sigma$$

421. المحاولات (التجارب) المتكررة

نوجه اهتمامنا هنا إلى حادث E مرتبط باختبار أو تجربة ما بحيث تكون نتيجة التجربة أحد أمرين : وقوع الحادث وهو ما نسميه «نجاح» أو عدم وقوع الحادث وهو ما نسميه «فشل» . فإذا فرضنا p احتمال وقوع الحادث E أي **احتمال النجاح** و q احتمال عدم وقوعه أي **احتمال الفشل** عند اجراء التجربة مرة واحدة ، فإنه لدى تكرار التجربة عدداً n من المرات ضمن الشروط ذاتها ، يكون احتمال حصولنا على x نجاحاً يعقبه $n - x$ فشلاً هو $p^x q^{n-x}$. (لاحظ هنا أن $0 \leqq p \leqq 1$ و $p + q = 1$) . أما احتمال وقوع الحادث E (أي النجاح) عدداً x من المرات من أصل n مرة ، وفشله $n - x$ مرة بغض النظر عن الترتيب فيعطى بالعلاقة

$$P(X = x) = f(x) = C_x^n p^x q^{n-x}$$

احتمال وقوع E **على الأقل** x مرة عند تكرار المحاولة (التجربة) n مرة هو

$$P[X \geqq x] = \sum_{i=x}^{n} C_i^n p^i q^{n-i} \qquad x = 0, 1, \ldots, n$$

احتمال وقوع E على الأكثر x مرة عند تكرار التجربة n مرة هو

$$P[X \leqq x] = \sum_{i=0}^{i=x} C_i^n p^i q^{n-i} \qquad x = 0, 1, \ldots, n$$

إن متوسط عدد مرات وقوع E هو $\mu = n\,p$ ومتوسط عدد مرات عدم وقوع E هو $n\,p$ (انظر الجدول 2) .

422. توزيع بواسون

نقول عن المتغير العشوائي المنقطع X أنه يتبع توزيع بواسون إذا كان احتمال أن يأخذ X القيمة x معطى بالعلاقة

$$(1)\quad P[X = x] = f(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}, \quad m > 0, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

لاحظ أن $f(o) = e^{-m}$.

يُعطى احتمال كون $X \geqq x'$ بالشكل

$$P[X \geqq x'] = \sum_{x=x'}^{x=\infty} \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

لاحظ أن $P[X \geqq 0] = 1$.

كما أن احتمال كون $X \leqq x^*$ هو

$$P[X \leqq x^*] = \sum_{x=0}^{x=x^*} \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

الخواص . تُعطى وسطاء توزيع بواسون كما يلي :

المتوسط = $m = \mu$

التباين = $m = \sigma^2$

الانحراف المعياري = $\sigma = \sqrt{m}$

أمثال (معامل التخالف) = $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}$

معامل الفائض = $\gamma_2 = \frac{1}{m}$

العزم الرائي μ_r حول المتوسط μ

$$\mu_2 = \sigma^2 = m \qquad \mu_3 = m \qquad \mu_4 = 3m^2 + m$$

العزم الرائي ν_r حول $x = 0$

$$\nu_1 = m \qquad \nu_2 = m(m+1) \qquad \nu_3 = m(m^2 + 3m + 1)$$
$$\nu_4 = m(m^3 + 6m^2 + 7m + 1)$$

يتقارب التوزيع الثنائي $C_x^n p^x q^{n-x}$ إلى توزيع بواسون عندما $n \to \infty$ و $p \to 0$ بحيث يكون $n p = m$ حيث m ثابت . وهكذا يمكن استخدام توزيع بواسون كتقريب جيد للتوزيع الثنائي عندما تكون n كبيرة جداً و p صغيرة جداً .

(مثلاً عندما $n > 50$ و $0 < np < 10 , p < 0.1$) (انظر الجدول 3).

423. التوزيع الطبيعي

نقول إن المتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع الطبيعي إذا كان احتمال كون $X \leqq x$ يعطى بالعلاقة

$$P[X \leqq x] = F_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[\frac{-(X-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dX$$

حيث μ و σ ثابتان ، $F_N(x)$ هو توزيع غوص الطبيعي المتجمع .

أما تابع الكثافة الاحتمالي للمتغير X في التوزيع الطبيعي فهو

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{1}$$

إن احتمال وقوع X بين القيمتين x' و x^* هو

$$P[x' < X \leqq x^*] = F_N(x^*) - F_N(x')$$

(انظر الجدول ج) .

يمكن كتابة تابع الكثافة الاحتمالي (1) بالشكل

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad ; \quad t = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

الخواص . تُعطى وسطاء التوزيع الطبيعي كما يلي

المتوسط = μ ، التباين = σ^2

الانحراف المعياري = σ

$$F_N(-\infty) = 0 \; , \; F_N(+\infty) = 1$$

معامل التخالف = $\gamma_1 = 0$ معامل الفائض = $\gamma_2 = 0$

المنوال = μ ، الأوسط = μ العزم الرائي μ_r حول المتوسط μ :

$$\mu_1 = 0 \qquad \mu_2 = \sigma^2 \qquad \mu_3 = 0 \qquad \mu_4 = 3\sigma^4$$

الانحراف المتوسط (المطلق) عن المتوسط هو

$$= MD = m.a.e. = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0.7979\sigma$$

مقياس الدقة = $h = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2}} = 0.7071\ \sigma$

الخطأ المحتمل = $p.e. = 0.6745\ \sigma = 0.8453\ (m.a.e.)$

الرُّبيعان العلوي والسفلي : $Q_3 = \mu + p.e.$ و $Q_1 = \mu - p.e.$

إن أجزاء المساحات الواقعة تحت المنحني $y = f_N(x)$ وفوق المحور ox والمحصورة بين مستقيمين موازيين للمحور oy هي

المدى	المنطقة ٪
$\mu \pm 0.6745\sigma$	50
$\mu \pm \sigma$	68.27
$\mu \pm 1.645\sigma$	90
$\mu \pm 2\sigma$	95.45
$\mu \pm 3\sigma$	99.73

424. احتمال الوقوع بانحرافات محددة

إن احتمال اختلاف X عن μ بقيمة لا تتجاوز σ هو

$$P[|X-\mu| \leqq \sigma] = P[-1 \leqq t \leqq 1]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t=-1}^{t=1} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt = 0.6827$$

هنا $t = (X - \mu) / \sigma$.

أما احتمال أن تنحرف x عن المتوسط μ أكثر من $\lambda \sigma$ فهو

$$P = P[|x - u| > \lambda\sigma] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

مثال . إن قيم λ الموافقة **لحدود إطاقة** على x مقدارها 0.1, 1, 5 بالمئة هي

λ	3.29	2.58	1.96
P	0.001	0.01	0.05

425. كثير الحدود الأوفق لمعطيات مُمَثّلة بمجموعة نقط

لتكن لدينا مجموعة النقط $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_k,y_k)$. نبحث بين مجموعة المنحنيات

$$y(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \qquad k > n$$

عن منحنٍ نسميه **المنحني الأوفق** الذي يمثل مجموعة النقط .

طريقة المربعات الأصغرية وهي طريقة نحصل من خلالها على الأمثال $a_i = A_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ الموافقة للمنحني الأوفق C وذلك بجعل المقدار

$$M = \sum_{i=1}^{k} \left(y_i - y (x_i) \right)^2$$

أصغر ما يمكن (من هنا أتت تسمية الطريقة) . أما شرط كون M أصغرياً فهو $\partial M / \partial a_j = 0 (j = 0, 1, \ldots, n)$. وهكذا نحصل على $A_0, A_1, \ldots, A_k$ بحل جملة المعادلات $\partial M/\partial a_j$

$$\begin{cases} A_0S_0 + A_1S_1 + \cdots + A_nS_n = T_0 \\ A_0S_1 + A_1S_2 + \cdots + A_nS_{n+1} = T_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_0S_n + A_1S_{n+1} + \cdots + A_nS_{2n} = T_n \end{cases}$$

حيث $T_j = \sum_{i=1}^{i=k} x_i^j y_i \qquad S_0 = k \qquad S_j = \sum_{i=1}^{i=k} x_i^j$

426. الترابط الخطي البسيط

إن أحد مقاييس درجة **الترابط** بين قيم x وقيم y الموافقة في المعطيات $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$ هو النسبة

$$r = \frac{\text{cov}\ (x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

حيث $\overline{x}$ و σ_x هما المتوسط والانحراف المعياري على الترتيب لقيم x كما أن $\overline{y}$ و σ_y هما المتوسط والانحراف المعياري لقيم y . ويتم قياس **التغاير** بين قيم x وقيم y بالعلاقة

$$\text{cov}\ (x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i y_i - k\bar{x}\bar{y}}{k}$$

نسمي r معامل الترابط (أو جداء العزم حول المتوسط) بين المتغيرين x و y .

ملاحظة : $var\ x = cov\ (x, x) = \sigma_x^2$.

427. المستقيم الأوفق لمجموعة نقط

يمكن جعل المستقيم $y(x) = a_0 + a_1 x$ موافقاً للنقط
$(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_k,y_k)$ بعدة أساليب .

فإذا اشترطنا أن يكون مجموع مربعات المسافات الشاقولية للنقط عن المستقيم أصغرياً ، نحصل على **مستقيم الانكفاء** (التراجع) المتوسط لـ y على x .

$$y - \bar{y} = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

ونسمي ميل المستقيم $m_1 = r\,\sigma_y / \sigma_x$ معامل انكفاء y على x .

أما الانحراف المعياري لخطأ التقدير في y فهو S_y حيث

$$S_y^2 = \sigma_y^2 (1 - r^2)$$

ونسمي S_2^2 **التباين الراسبي** لـ y ، أما S_y فيسمى **الخطأ المعياري** لتقدير y .

أما إذا اشترطنا أن يكون مجموع مربعات المسافات الأفقية بين النقط والمستقيم أصغرياً . فإننا نحصل على مستقيم نسميه مستقيم الانكفاء (المتوسط) لـ x على y :

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_y}{r\sigma_x}(x - \bar{x})$$

ونسمي $r\,\sigma_x / \sigma_y$ معامل انكفاء x على y .

S_x هنا هي الانحراف المعياري لأخطاء التقدير في x وتسمى الخطأ المعياري لتقدير x . أما التباين الراسبي لـ x فهو

$$S_X^2 = \sigma_x^2 (1 - r^2)$$

عندما يكون $r = \mp 1$ يتطابق مستقيما الانكفاء ويكون الترابط كاملاً . فإذا كان $r = 0$ فالمستقيمان في حالة التباعد الأعظمي ويكون x و y غير مترابطين . أما إذا كان $r \neq 0$ فإن x و y مترابطين . عندما $r < 0$ فإن y يتناقص عندما يتزايد x بصورة عامة ، ويتزايد x مع y عندما $r > 0$.

428. توزيعات العيّنة

يتكون المجتمع الاحصائي من مجموعة $\{x\}$ من قيم المتغير X . **العينة** هي مجموعة من القيم ... $x_1, x_2, x_3,$ المأخوذة من المجتمع $\{x\}$. ليكن $f(x)$ تابع توزيع تكرار X في $\{x\}$ ولنفرض أن $\tilde{x}$ هو متوسط X و σ_x^2 تباين X .

يمكن اعتبار مجموعة القيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ في مجموعة كل العينات العشوائية الممكنة التي حجمها n ، مستقلة إحصائياً . فإذا كان تابع توزيع تكرار x_i هو $f(x_i)$ فإن لمجموعة العينة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تابعاً لتوزيع التكرار هو

$$f(x_1)\, f(x_2) \ldots f(x_n)$$

نفرض الآن من أجل العينة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ أن المتوسط $\overline{x}$ والتباين s^2 هما

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \qquad s^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

نظرية 1. إن التقدير المنصف لمتوسط المجتمع $\tilde{x}$ هو متوسط العينة $\overline{x}$ ، أما التباين σ_x^2 للمجتمع فهو $s^2 n / (n-1)$ حيث

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 / n$$

هو تباين العينة .

نظرية 2. إذا خضعت قيم مجتمع إحصائي لا نهائي x للتوزيع الطبيعي بمتوسط $\tilde{x}$ وانحراف معياري σ_x فإن توزيع معاينة المتوسطات $\overline{x}$ يكون موزعاً وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط $\tilde{x}$ وانحراف معياري $\sigma_x / \sqrt{n}$.

أما الاحتمال p لوقوع x لأي عينة في المجال

$$\tilde{x} - \delta \leqq x \leqq \tilde{x} + \delta$$

فهو

$$p = \int_{-\beta}^{+\beta} \psi(u)\, du$$

حيث

$$\beta = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_x}$$

$$u = (\bar{x} - \tilde{x})\frac{\sqrt{n}}{\sigma_x} \qquad \psi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

429. جودة التوفيق (الملاءمة)

توجد طرائق احصائية متعددة لنعرف إلى أي مدى يمثل توزيع العينة توزيع المجتمع الإحصائي $f(x)$.

إحدى هذه الطرائق هي طريقة «كاي - مربع» .

من أجل المقارنة يتم استخدام التكرارات المشاهدة وتكرارات المجتمع الاحصائي لمجموعة مناسبة من صنف مجالات متغير التوزيع .

لنأخذ مجموعة من الأشياء التي تندرج في r من مجالات الصنف (**الخلايا**) غير المتقاطعة مثنى مثنى . لتكن لدينا عينة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ من n من الأشياء التي تكرارتها المشاهَدة هي f_i في الخلية i

$$\left(n = \sum_{i=1}^{r} f_i \right)$$

وأن التكرار النظري المفترض من أجل الخلية i هو $n\,p_i$. إن اختبار χ^2 يدرس الفرق بين f_i و $n\,p_i$ من أجل جميع الخلايا . يقاس هذا الفرق بالعلاقة

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i} = \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{f_i^2}{np_i} \right) - n \qquad (1)$$

الفرضية H للاختبار هي أن المعطيات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هي عينة لمتغير عشوائي بتوزع $f(x)$. وهدف الاختبار هو تعيين فيما إذا كانت المعطيات المشاهَدَة منسجمة مع H .

أما خطوات الاختبار فهي : **(a)** حساب (1) . **(b)** تعيين عدد درجات الحرية m . **(c)** اختيار مستوى الدلالة وليكن ϵ . **(d)** نوجد من جداول توزيع χ^2 تلك الـ χ_0^2 بحيث $\epsilon \approx \left[\ \chi^2 \geqq \chi_0^2\ \right] P$

(انظر الجدول 4) .

أما تفسير الاختبار فهو كما يلي : **(a)** إذا كان $\chi^2 > \chi_0^2$ من أجل العينة ، فإن هذه العينة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تنحرف بشكل ملموس عن الفرضية H ، ويتم رفض الفرضية بمستوى دلالة ϵ . **(b)** إذا كان $\chi^2 \leqq \chi_0^2$ فإن العينة $x_1, x_2, \ldots,$ x_n تعتبر منسجمة مع الفرضية H .

لدى استخدام الجدول 4 ، يجب أن نقدر عدد درجات الحرية m حيث $m = r - 1 - b$ ، r عدد الخلايا ، b عدد وسطاء توزيع المجتمع الاحصائي المعين من العينة . فإذا كان توزيع المجتمع الاحصائي معروفاً تماماً فإن $m = r - 1$

ويمكن تطبيق اختبار كاي ـ مربع عندما تكون المعطيات مجمَّعة في خلايا حيث تكون n كبيرة جداً ($n \geqq 50$ مثلاً) ، وتكرارات خلية العينة ، والتكرارات النظرية ليست صغيرة جداً ، والقيود على تكرارات الخلية ، خطية .

(f_i و $\overline{np_i}$ أكبر من 5 إلى 10) .

يتم تطبيع الجدول 4 فقط عندما $m \leqq 30$. فإذا كانت $m > 30$ فإن $\sqrt{2\chi^2}$ يتبع تقريباً التوزع الطبيعي بمتوسط $\sqrt{2m-1}$ وانحراف معياري مساوٍ للواحد .

430. اختبار تقدير الاحتمال لحادث من عينة واحدة

نفرض أن الحادث E يقع v مرة لدى تكرار اختبار n مرة . والمطلوب اختبار انسجام هذا الناتج مع **فرضية** أن احتمال وقوع E هو $p = 1 - q$ في كل تجربة .

لدينا هنا $r = 2$ من مجالات الصنف من أجل المشاهدات ، وبشكل صريح ، فنحن أمام حالتين: وقوع E أو عدم وقوعه .

وهكذا نجد من المعادلة (1) (انظر 429) حيث $r = 2$

$$f_1 = v , \quad f_2 = n - v , \quad f'_1 = n p , \quad f'_2 = n p$$

$m = r - 1 = 1$ (عدد درجات الحرية) ، نجد أن

$$\chi^2 = \frac{(v - np)^2}{npq}$$

مثال . إذا كان $n = 40$, $v = 12$, $p = 0.25$ فإن

$$\chi^2 = \left[12 - (0.25)(40) \right]^2 / 40 (0.25)(0.75) = 0.53$$

ويبين الجدول 4 أن قيمة χ^2 القريبة من 0.53 تكون متوقعة في أكثر من 40 بالمئة من العينات . وهكذا تكون قيمة العينة $v = 12$ ليست بعيدة الاحتمال إذا كان الاحتمال الفعلي لـ E هو $P = 0.25$.

القسم الثاني

تسهيلاً لجميع مستخدمي «المورد في الرياضيات» في المرحلة قبل الجامعية، فقد رأينا إضافة هذا الجزء الخاص الذي يحتوي على كل ما يلزم لطلاب المرحلة الثانوية وِفق المصطلحات والرموز العربية.

١. الجبر ، الاحتمالات ، الاحصاء

1. المتطابقات الأساسية

$(\text{ب} + \text{حـ})^{٢} = \text{ب}^{٢} + ٢\,\text{ب}\,\text{حـ} + \text{حـ}^{٢}$

$(\text{ب} - \text{حـ})^{٢} = \text{ب}^{٢} - ٢\,\text{ب}\,\text{حـ} + \text{حـ}^{٢}$

$\text{ب}^{٢} - \text{حـ}^{٢} = (\text{ب} + \text{حـ})\,(\text{ب} - \text{حـ})$

$(\text{ب} + \text{حـ})^{٣} = \text{ب}^{٣} + ٣\,\text{ب}^{٢}\,\text{حـ} + ٣\,\text{ب}\,\text{حـ}^{٢} + \text{حـ}^{٣}$

$(\text{ب} - \text{حـ})^{٣} = \text{ب}^{٣} - ٣\,\text{ب}^{٢}\,\text{حـ} + ٣\,\text{ب}\,\text{حـ}^{٢} - \text{حـ}^{٣}$

$\text{ب}^{٣} + \text{حـ}^{٣} = (\text{ب} + \text{حـ})\,(\text{ب}^{٢} - \text{ب}\,\text{حـ} + \text{حـ}^{٢})$

$\text{ب}^{٣} - \text{حـ}^{٣} = (\text{ب} - \text{حـ})\,(\text{ب}^{٢} + \text{ب}\,\text{حـ} + \text{حـ}^{٢})$

$(\text{ب} + \text{حـ} + \text{ى})^{٢} = \text{ب}^{٢} + \text{حـ}^{٢} + \text{ى}^{٢} + ٢\,\text{ب}\,\text{حـ} + ٢\,\text{ب}\,\text{ى} + ٢\,\text{حـ}\,\text{ى}$

2. القوى وخواصها

ليكن ب ، حـ عددين حقيقيين موجبين ، ه ، ط عددين حقيقيين فإن

$\text{ب}^{\text{ه}} \times \text{ب}^{\text{ط}} = \text{ب}^{\text{ه}+\text{ط}}$

$(\text{ب} \times \text{حـ})^{\text{ه}} = \text{ب}^{\text{ه}} \times \text{حـ}^{\text{ه}}$

$$\text{ب}^{-\text{د}} = \frac{١}{\text{ب}^{\text{د}}} \qquad \frac{\text{ب}^{\text{د}}}{\text{ب}^{\text{ط}}} = \text{ب}^{\text{د}-\text{ط}}$$

$$\text{ب}^{٠} = ١ \quad (\text{ب} \neq ٠) \qquad \left(\frac{\text{ب}}{\text{حـ}}\right)^{\text{د}} = \frac{\text{ب}^{\text{د}}}{\text{حـ}^{\text{د}}}$$

$$\frac{١}{٠} \text{ غير معرّف} \qquad (\text{ب}^{\text{د}})^{\text{ط}} = \text{ب}^{\text{دط}}$$

$$٠^{\text{د}} = ٠$$

3. الجذور وخواصها

$$\sqrt[\text{د}]{\text{ب} \times \text{حـ}} = \sqrt[\text{د}]{\text{ب}} \times \sqrt[\text{د}]{\text{حـ}} \qquad \sqrt[\text{د}]{\text{ب}} = \text{ب}^{\frac{١}{\text{د}}}$$

$$\sqrt[\text{د}]{\frac{\text{ب}}{\text{حـ}}} = \frac{\sqrt[\text{د}]{\text{ب}}}{\sqrt[\text{د}]{\text{حـ}}} \qquad \left(\sqrt[\text{د}]{\text{ب}}\right)^{\text{ط}} = \sqrt[\text{د}]{\text{ب}^{\text{ط}}}$$

$$\sqrt[\text{د}]{\text{ب}^{\text{م}}} = \text{ب}^{\frac{\text{م}}{\text{د}}} \qquad \sqrt[\text{د}]{\text{ب}} = \sqrt[\text{دط}]{\text{ب}^{\text{ط}}}$$

4. اللغاريتمات وخواصها

ليكن $\text{ب} = \text{هـ}^{\text{د}}$ ، $(\text{هـ} > ٠)$ فإن $\text{د} = \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ب}$ (هـ : أساس اللغاريتم)

ويتحقق ما يلي :

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\ ١ = ٠ \qquad \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{هـ} = ١$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\ (\text{ب} \,.\, \text{حـ}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ب} + \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{حـ}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\ \frac{\text{ب}}{\text{حـ}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ب} - \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ب}$$

ملاحظات :

(1) العلاقة بين لغاريتميّ عدد ل بالنسبة لأساسين مختلفين هـ و ط هي

$$لع_{هـ}\ ل = لع_{ط}\ ل \times لع_{هـ}\ ط$$

(2) لا يكون لع$_{هـ}$ ب معرّفاً إلا إذا كان ب > ٠

(3) تمام لغاريتم ب بالنسبة للأساس هـ هو

$$عا\ لع_{هـ}\ ب = -\ لع_{هـ}\ ب$$

(4) اللغاريتم الطبيعي هو لغاريتم أساسه العدد النيبري e الذي يساوي ٢,٧١٨٢٨ .

(5) اللغاريتم العشري هو لغاريتم أساسه العدد ١٠ .

(6) اللغاريتم الطبيعي أو العشري لأي عدد أصغر من الواحد هو مقدار سالب .

(7) $نها_{س \leftarrow ٠}\ لع\ س = -\ \infty$

5. الأعداد العقدية (المركبة)

العدد العقدي ص هو عدد من الشكل ص = س + ت ع حيث س ، ع حقيقيان و ت = $\sqrt{-١}$ ، $ت^٢ = -١$ ، $ت^٣ = -ت$، $ت^٤ = ١$.

يتم تمثيل العدد العقدي ص في المستوي بنقطة فاصلتها س وترتيبها ع .

ملاحظات

(1) تشكل مجموعة الأعداد العقدية ك حقلاً على المجموعة $ي^٢$ المزودة بالعمليتين :

$$(س_١ ، ع_١) \oplus (س_٢ ، ع_٢) = (س_١ + س_٢ ، ع_١ + ع_٢)$$

$(س_1 ، ع_1) \odot (س_2 ، ع_2) = (س_1س_2 - ع_1ع_2 ، س_1ع_2 + ع_1س_2)$

(a) يتم اجراء العمليات الحسابية على الأعداد العقدية بسهولة باستخدام الشكل الجبري

$$ص = س + ت ع$$

أمثلة .

$٣ - ٥ت + ٧ + ت = ١٠ - ٤ت$

$(٢ + ت) (٣ - ٢ت) = ٦ - ٤ت + ٣ت - ٢ت^2$

$= ٨ - ت$

$$\frac{٥ + ت}{١ + ٣ت} = \frac{(٥ + ت)(١ - ٣ت)}{(١ + ٣ت)(١ - ٣ت)} = \frac{٨}{١٠} + \frac{-١٤}{١٠} ت$$

(3) **مرافق العـدد العقدي** $ص = س + ت ع$ هو $\overline{ص} = س - ت ع$

كما أن $ص \overline{ص} = س^2 + ع^2$.

(4) **الشكل القطبي** للعدد العقدي $ص = س + ت ع$ هو

$ص = [ر ، هـ]$ حيث ر ، هـ هما الاحداثيان القطبيان لصورة ص في المستوي .

وينتج أن $ص = ر (جتا هـ + ت جا هـ)$ وهو ما يعرف **بالشكل المثلثي** للعدد العقدي ص .

(5) يتم تحويل الشكل الجبري $ص = س + ت ع$ إلى الشكل المثلثي باستخدام العلاقتين

$$ر = \sqrt{س^2 + ع^2} \qquad طل هـ = \frac{ع}{س}$$

(6) يمكن اجراء عملية الضرب والرفع إلى قوة بسهولة باستخدام الشكل القطبي أو المثلثي وفق ما يلي :

$$ص_١ \cdot ص_٢ = [ر_١ ، هـ_١] \, [ر_٢ ، هـ_٢] = [ر_١ ر_٢ ، هـ_١ + هـ_٢]$$

$$ص^ن = [ر ، هـ]^ن = [ر^ن ، ن\, هـ]$$

دستور دوموافر

$$ص^ن = ر^ن \, (تجب\, هـ + ت\, جب\, هـ)^ن = ر^ن \, (تجب\, ن\, هـ + ت\, جب\, ن\, هـ)$$

(7) يتم إيجاد جذور العدد العقدي ص = [ر ، هـ] من العلاقة

$$\sqrt[ن]{ص} = [ر ، هـ]^{\frac{١}{ن}} = [\sqrt[ن]{ر} ، \frac{هـ}{ن} + \frac{٢\pi}{ن} ك]$$

حيث ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، .... و ن − ١

6. دستور مفكوك ذي الحدين

$$(ب + حـ)^ن = ب^ن + ن\, ب^{ن-١} حـ + \frac{ن(ن-١)}{٢\,!} ب^{ن-٢} حـ^٢ + \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٣\,!} ب^{ن-٣} حـ^٣ + \ldots + ن\, ب\, حـ^{ن-١} + حـ^ن$$

حيث ط ! = ط (ط − ١) (ط − ٢) .... ٣ . ٢ . ١

بفرض ط صحيح موجب . كما نصطلح أن

٠ ! = ١ ، ١ ! = ١

7. التحليل التوافقي

القاعدة الأساسية في العد إذا كان عدد النواتج الممكنة المختلفة لتجربة أ هو $ن_1$ وعدد النواتج الممكنة المختلفة لتجربة أخرى ب هو $ن_2$ ، وعدد النواتج الممكنة المختلفة لتجربة ثالثة حـ هو $ن_3$ وهكذا . . . فإن عدد النواتج الممكنة المختلفة لهذه التجارب لدى إجرائها معاً هو حاصل الضرب

$$ن_1 \times ن_2 \times ن_3 \times \ldots$$

مثال . التجربة أ هي سحب ورقة من ورق اللعب ، التجربة ب هي سحب ورقة من ورق اللعب . نجد أن عدد النواتج الممكنة عند إجراء أ و ب هو ٥٢ × ٥٢ عند إعادة الورقة المسحوبة وهو ٥٢ × ٥١ عند عدم إعادة الورقة المسحوبة .

الترتيب هو مجموعة من العناصر المرتبة التي نأخذ فيها الترتيب بعين الاعتبار ، وهكذا فإن الترتيب (١ ، ٣ ، ٥) يختلف عن (٣ ، ١ ، ٥) .

التوافق (التوفيق) هو مجموعة من العناصر مثل (٣ ، ٥ ، ١) ولا يختلف التوافق عن توافق آخر إلا باختلاف عنصر واحد على الأقل ، وهكذا فإن (١ ، ٣ ، ٥) و (٣ ، ٥ ، ١) متماثلان بينما (٢ ، ٣ ، ٥) توافق مختلف .

عدد التراتيب التي يمكن تشكيلها من ن عنصراً مأخوذة ر في كل مرة ($ر \leqq ن$) هو

$$ت(ن ، ر) = ن(ن-1) \ldots (ن-ر+1) = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

عدد التراتيب التي يمكن تشكيلها من ن عنصراً مأخوذة جميعها هو

$$ت(ن ، ر) = ن(ن-1) \ldots 2 . 1 = ن! \quad (\text{عاملي } ن)$$

يسمي بعض المؤلفين هذا النوع من التراتيب **بالتباديل** .

عدد التوافيق (التوافقات) التي يمكن تشكيلها من ن عنصراً مأخوذة ر في كل مرة (ر ≦ ن) هو

ق (ن ، ر) = ن ! ÷ (ن − ر) ! ر !

ويتحقق لدينا

ق (ن ، ٠) = ق (ن ، ن) = ١

ق (ن ، ر) = ق (ن ، ن − ر)

ت (ن ، ر) = ر ! ق (ن ، ر)

8. جبر بول (ب ، ★ ، ⊤ ، /)

هو مجموعة غير خالية مزودة بقانوني تشكيل داخليين ★ و ⊤ بحيث تتحقق الشروط :

(1) ★ تجميعي وتبديلي على ب ويقبل عنصراً حيادياً ى١ .

(2) ⊤ تجميعي وتبديلي على ب ويقبل عنصراً حيادياً ى٢ .

(3) ∀ ا ∈ ب : E ا' ∈ ب : ا ★ ا' = ى٢ و ا ⊤ ا' = ى١

حيث نسمي ا' متمم ا .

(4) ★ توزيعي على ⊤ كما أن ⊤ توزيعي على ★ .

خواص إضافية لجبر بول

(1) ا ★ ا = ا (اللا نمو) ا ⊤ ا = ا

(2) العنصر الحيادي بالنسبة لأحد القانونين هو العنصر الماصّ بالنسبة للآخر .

(3) (ا')' = ا (الارتداد)

(4) $(أ \star ب)' = أ' \top ب'$ (الثنوية) $(أ \top ب)' = أ' \star ب'$

(5) $ى_1$ وحيد ، $ى_2$ وحيد ، $أ'$ وحيد لكل $أ$ (الوحدانية)

9. الاحتمالات

الاختبار هو تجربة نحصل بعد إنجازها على نتيجة محددة أو عدة نتائج نسمى كلاً منها **حادثاً بسيطاً** . فرمي حجر النرد هو اختبار والحدث (الحادث) البسيط هو حصولنا على 4 مثلاً كنتيجة لهذا الاختبار .

فضاء العينة ك هو مجموعة جميع الحوادث البسيطة أي مجموعة جميع نتائج الاختبار .

الحادث (الحدث) هو مجموعة جزئية من فضاء العينة . ونعني **بوقوع** حادث ما س حصولنا على نتيجة تنتمي إلى س .

الحادث الأكيد هو ك و **الحادث المستحيل** هو $\varnothing$.

الحادث المتمم $س'$ للحادث س هو ذلك الحادث المكون من جميع النتائج غير المنتمية إلى س .

مجموع حادثين س و ص هو الحادث $س \cup ص$ الذي يقع إذا وقع أحد الحادثين على الأقل .

جداء حادثين س و ص هو الحادث $س \cap ص$ الذي يقع إذا وقع الحادثان معاً .

الحادثان المتنافيان س و ص هما الحادثان اللذان لا يمكن وقوعهما في وقت واحد معاً أي $س \cap ص = \varnothing$.

تابع الاحتمال حت (س) هو ذلك التابع المعرّف على ج (ك) مجموعة أجزاء فضاء العينة ك ويأخذ قيمه في المجال [٠ ، ١] وبحيث يتحقق ما يلي :

(1) $\forall$ س $\in$ ج(ك) : حت (س) $\geqq$ ٠

(2) حت (ك) = ١

(3) حت (س١ $\cup$ س٢) = حت (س١) + حت (س٢) من أجل حادثين متنافيين س١ و س٢ .

نتيجة إن احتمال وقوع أي حادث هو عدد من المجال [٠ ، ١] .

قانون جمع الاحتمالات .

حت (س $\cup$ ص) = حت (س) + حت (ص) - حت (س $\cap$ ص)

الاحتمال الشرطي . إذا كان س و ص حادثين مرتبطين باختبار احتمالي مفروض ، فضاء العينة له هو ك ، وإذا كان وقوع أحد الحادثين يرتبط بوقوع الحادث الآخر ، فإن احتمال وقوع ص علماً بأن س قد وقع هو ما نسميه بالاحتمال الشرطي لـ ص ونرمز له بـ حت (ص | س) . أو بـ حتس (ص)

احتمال تقاطع حادثين

حت (س $\cap$ ص) = حت (س) . حتس (ص) = حت (ص) . حتص (س)

حساب الاحتمال

$$\text{حت (س)} = \frac{\text{عدد الحالات التي يمكن أن يقع فيها س}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$$

ونشترط هنا ضمناً أن فضاء العينة منته .

الاستقلال العشوائي نقول إن الحادثين س و ص مستقلان عشوائياً إذا وفقط إذا كان

$$\text{حت}_{ص}\,(س) = \text{حت}\,(س) \quad ، \quad \text{حت}_{س}\,(ص) = \text{حت}\,(ص)$$

وينتج أن

$$\text{حت}\,(س \cap ص) = \text{حت}\,(س) \times \text{حت}\,(ص)$$

مبدأ الاحتمالات المركبة

$$\text{حت}\,(س \cap ص \cap ع) = \text{حت}\,(س)\ \text{حت}_{س}\,(ص)\ \text{حت}_{س \cap ص}\,(ع)$$

فإذا كانت س ، ص ، ع مستقلة عشوائياً فإن

$$\text{حت}\,(س \cap ص \cap ع) = \text{حت}\,(س)\ \text{حت}\,(ص)\ \text{حت}\,(ع)$$

المتغير العشوائي هو تطبيق عا : ك ← ح يقابل كل عنصر من فضاء العينة بعدد حقيقي بحيث تكون الصورة العكسية لأي مجال من ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) هو حادث في ك .

التوقع الرياضي لمتغير عشوائي س يأخذ القيم $س_1$ ، $س_2$ ، . . . $س_ن$ باحتمالات موافقة تا ($س_1$) ، تا ($س_2$) ، . . . ، تا ($س_ن$) هو

$$\text{تو} = س_1\ \text{تا}\,(س_1) + س_2\ \text{تا}\,(س_2) + \ldots + \text{تا}\,(س_ن)$$

ويسمى تا (س) في هذه الحالة قانون احتمال المتغير العشوائي س .

10. الاحصاء

يدرس الإحصاء البيانات العددية لظاهرة ما بصورة علمية لنتمكن من اتخاذ القرار المناسب لتلك الظاهرة . وتبدأ الدراسة عادة بجمع البيانات وترتيبها وفق جداول ، ثم محاولة استخلاص بعض الثوابت العددية التي يمكن أن تصف العينة بصورة أكثر وضوحاً ، وتصف بعض هذه الثوابت مدى تكاثف القياسات المرتبطة بعينة ما حول قيمة محددة (مقاييس الموضع أو النزعة المركزية) ، وتصف الثوابت الأخرى مدى تناثر تلك القياسات (مقاييس التشتت) .

مقاييس الموضع (النزعة المركزية)

(1) **المتوسط الحسابي** م لمجموعة قياسات $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، . . . ، $س_{د}$ تكراراتها هي $ر_{١}$ ، $ر_{٢}$ ، . . . ، $ر_{د}$ هو

$$م = \frac{س_{١}ر_{١} + س_{٢}ر_{٢} + \ldots + س_{د}ر_{د}}{ر_{١} + ر_{٢} + \ldots + ر_{د}}$$

(2) **الأوسط** (الوسيط) لمجموعة من القياسات المرتبة تصاعدياً (أو تنازلياً) هو تلك القيمة الواقعة في وسط القياسات (أي عدد القيم الأكبر منها مساوياً لعدد القيم الأصغر منها) أما إذا كان عدد القياسات فردياً فالأوسط هو نصف مجموع القيمتين الواقعتين في الوسط .

(3) **المنوال** هو تلك القيمة التي يكون تكرارها أكبر ما يمكن .

مقاييس التشتت

(1) **المدى** لمجموعة من القياسات هو الفرق بين أكبر قياس وأصغر قياس .

(2) **الرُّبَيع** عندما نقسم مجموعة القياسات المرتبة تصاعدياً إلى أربعة أجزاء متساوية فإننا نحصل على ثلاثة قياسات نُسمي كلاً منها رُبيعاً وهكذا لدينا $ر_{١}$ الربيع

الأول و $ر_٢$ الربيع الثاني (الأوسط) و $ر_٣$ الربيع الثالث .

(3) **الانحراف الربيعي** $س_ر$ هو

$$أ_ر = \frac{ر_٣ - ر_١}{٢}$$

(4) **التباين** لمجموعة $ن$ من القياسات $س_١$ ، $س_٢$ ، . . . ، $س_ن$ هو

$$ع^٢ = \frac{(س_١ - م)^٢ + \ldots + (س_ن - م)^٢}{ن}$$

(5) **الانحراف المعياري** ع هو

$$ع = \sqrt{\frac{(س_١ - م)^٢ + \ldots + (س_ن - م)^٢}{ن}}$$

11. الفراغ الشعاعي الحقيقي (فضاء المتجهات الحقيقي)

فراغ الأشعة الحقيقي ف هو مجموعة $\mathfrak{S}$ من العناصر مزوّدة بقانون تشكيل داخلي $\oplus$ يقابل كل عنصرين من $\mathfrak{S}$ بعنصر من $\mathfrak{S}$ ، وبقانون تشكيل خارجي $\odot$ يقابل كل عنصر س من $\mathfrak{S}$ بعنصر ل $\odot$ س من $\mathfrak{S}$ مهما يكن ل $\in$ ح . وبحيث تتحقق الشروط التالية من أجل أي عناصر س ، ص ، ع منتمية إلى $\mathfrak{S}$ ومن أجل أي عددين حقيقين ل ، ط :

($د_١$) س $\oplus$ ص = ص $\oplus$ س

($د_٢$) س $\oplus$ (ص $\oplus$ ع) = (س $\oplus$ ص) $\oplus$ ع

($د_٣$) س $\oplus$ ى = س (ى العنصر الحيادي في $\mathfrak{S}$)

($د_٤$) يوجد لكل س عنصر نظير − س بحيث س $\oplus$ (− س) = ى

(خ١) ل $\odot$ (س $\oplus$ ص) = (ل $\odot$ س) $\oplus$ (ل $\odot$ ص)

(خ٢) (ل + ط) $\odot$ س = (ل $\odot$ س) $\oplus$ (ط $\odot$ س)

(خ٣) (ل ط) $\odot$ س = ل $\odot$ (ط $\odot$ س)

(خ٤) ١ $\odot$ س = س (١ هو العدد الحقيقي المألوف)

ملاحظة هامة يسمى كل عنصر من فراغ الأشعة «شعاعاً» ، ويجب التنبيه إلى أن «الشعاع» هنا لا يعني أبداً الشعاع المألوف ، واستخدامنا لهذه التسمية ليس سوى (اعتراف) بأن هذه البنية أي فراغ الأشعة قد أتت من الأشعة المألوفة التي تشكل بحد ذاتها فراغ أشعة ، حيث ينطبق الإسم على المسمى في هذه الحالة فقط .

الفراغ الشعاعي الجزئي إذا كانت ف فراغاً شعاعياً مجموعته $\mathfrak{S}$ وكانت $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S}_1 \neq \varnothing$) فإن $\mathfrak{S}_1$ تشكل فراغاً شعاعياً بالنسبة لقانوني التشكيل المعرفين على $\mathfrak{S}$ إذا تحقق :

(1) $\forall$ س١ ، س٢ $\in \mathfrak{S}_1 \Leftarrow$ س١ $\oplus$ س٢ $\in \mathfrak{S}_1$

(2) $\forall$ ل $\in$ ح ، $\forall$ س $\in \mathfrak{S}_1 \Leftarrow$ ل $\odot$ س١ $\in \mathfrak{S}_1$

التركيب الخطي لجملة عناصر س١ ، س٢ ، . . . ، سك من فراغ شعاعي ف هو

(أ١ $\odot$ س١) $\oplus$ (أ٢ $\odot$ س٢) $\oplus$ . . . $\oplus$ (أك $\odot$ سك)

حيث أ١ ، أ٢ ، . . . ، أك تنتمي إلى ح .

الفراغ الشعاعي المولَّد فم لتكن

ج = { س١ ، س٢ ، . . . ، سك }

مجموعة عناصر من فراغ شعاعي ف . نقول إن ج تولِّد فم إذا كان أي عنصر من فم هو تركيب خطي من ج .

الاستقلال والارتباط الخطي . نقول إن مجموعة العناصر

$$ج = \{ س_١ ، س_٢ ، . . . ، س_ك \}$$

من ف مستقلة خطياً **(حرة)** إذا كان تحقُّق العلاقة

$$(*) \; (أ_١ \odot س_١) \oplus (أ_٢ \odot س_٢) \oplus . . . \oplus (أ_ك \odot س_ك) = ى$$

لا يتم إلا إذا كان $أ_١ = أ_٢ = . . . = أ_ك = ٠$

إما إذا كان يوجد مجموعة من الأعداد $أ_١$ ، $أ_٢$ ، . . . ، $أ_ك$ **ليست جميعها أصفاراً** بحيث تتحقق (*) فإن ج مرتبطة خطياً **(مقيدة)** .

أساس الفراغ الشعاعي ف هو جملة

$$ج = \{ س_١ ، س_٢ ، . . . ، س_د \}$$

مستقلة خطياً وتولِّد ف .

عدد أبعاد الفراغ الشعاعي هو عدد عناصر أي أساس لهذا الفراغ .

12. التوابع الخطية

ليكن لدينا التابع تا : ف ← ن المعرف على الفراغ الشاعي ف والذي يأخذ قيمه في الفراغ الشعاعي ن . نسمي تا تابعاً خطياً إذا تحقق :

$$(1) \; \forall س_١ ، س_٢ \in ف \Leftarrow تا(س_١ \oplus س_٢) =$$
$$= تا(س_١) \oplus تا(س_٢)$$

$$(2) \; \forall ل \in ح ، \forall س \in ف \Leftarrow تا(ل \odot س) = ل \otimes تا(س)$$

المؤثر الخطي هو تابع خطي معرف على ن ويأخذ قيمة في ن .

نواة التابع الخطي ليكن تا : ق ← ن تابعاً خطياً فإن نواة تا هي مجموعة جزئية من ق تتكون من جميع العناصر س المحققة للعلاقة تا (س) = ي ن ونرمز للنواة بالشكل نو(تا) .

مصفوفة التابع الخطي . إذا كان $\mathcal{V}$ فراغاً شعاعياً أساسه $\{ ط_1 ، ط_2 \}$
وكان تا مؤثراً خطياً معرفاً على $\mathcal{V}$ فإن

$$تا\,(ط_1) = (أ \odot ط_1) \oplus (ب \odot ط_2)$$
$$تا\,(ط_2) = (حـ \odot ط_1) \oplus (ء \odot ط_2)$$

ونسمي $\begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ مصفوفة التابع الخطي .

13. العمليات على المصفوفات

جمع مصفوفتين يتم كما يلي :

$$\begin{pmatrix} أ_1 & ب_1 \\ حـ_1 & ء_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} أ_2 & ب_2 \\ حـ_2 & ء_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ_1 + أ_2 & ب_1 + ب_2 \\ حـ_1 + حـ_2 & ء_1 + ء_2 \end{pmatrix}$$

ضرب مصفوفة $م$ **بعدد** ل يتم كما يلي :

$$ل \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ل\,أ & ل\,حـ \\ ل\,حـ & ل\,ء \end{pmatrix}$$

ضرب مصفوفتين $م_1$ و $م_2$ يتم كما يلي :

$$\begin{pmatrix} أ_1 & ب_1 \\ حـ_1 & ء_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} أ_2 & ب_2 \\ حـ_2 & ء_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} أ_1 أ_2 + ب_1 حـ_2 & أ_1 ب_2 + ب_1 ء_2 \\ حـ_1 أ_1 + ء_1 حـ_2 & حـ_1 ب_2 + ء_1 ء_2 \end{pmatrix}$$

مقلوب مصفوفة م هو مصفوفة نرمز لها بـ م^{-1} وتحقق

$$\text{م}\,\text{م}^{-1} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

فإذا كانت

$$\text{م} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ح} & \text{ء} \end{pmatrix}$$

فإن $\text{م}^{-1} = \dfrac{1}{\triangle} \begin{pmatrix} \text{ء} & -\text{ب} \\ -\text{ح} & \text{أ} \end{pmatrix}$

حيث $\triangle = \text{أ}\,\text{ء} - \text{ب}\,\text{ح}$

14. المحدّدات (المعينات)

المحدد من المرتبة الثانية هو العدد $\text{أ}\,\text{ء} - \text{ب}\,\text{ح}$ الذي يقابل المصفوفة

$$\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ح} & \text{ء} \end{pmatrix} \quad \text{ونرمز له بالشكل} \quad \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ح} & \text{ء} \end{vmatrix}$$

وهكذا فإن $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ١- & ٢ \end{vmatrix} = ١١$.

المحدد من المرتبة الثالثة هو العدد

$$\triangle = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ح} \\ \text{ك} & \text{ل} & \text{م} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix} \quad \text{المقابل للمصفوفة} \quad \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ح} \\ \text{ك} & \text{ل} & \text{م} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \end{pmatrix}$$

ويتم حساب المحدد من المرتبة الثالثة وفق العلاقة

$$\Delta = أ \begin{vmatrix} ل & م \\ هـ & و \end{vmatrix} - ب \begin{vmatrix} ك & م \\ د & و \end{vmatrix} + حـ \begin{vmatrix} ك & ل \\ د & هـ \end{vmatrix}$$

خواص المحددات

(1) إذا تساوى عمودان أو سطران في محدد كانت قيمته صفراً .

(2) إذا بادلنا بين سطرين أو عمودين في محدد تغيرت إشارة قيمة المحدد .

(3) إذا جعلنا أعمدة المحدد أسطراً لا تتغير قيمة المحدد .

(4) إذا ضربنا عناصر سطر أو عمود بعدد فإن قيمة المحدد تُضرب بذلك العدد .

(5) إذا جمعنا عناصر سطر أو عمود لعناصر سطر أو عمود آخر لا تتغير قيمة المحدد .

15. الفائدة البسيطة

نفرض م رأس المال الأصلي ، ر معدل الفائدة أي الفائدة السنوية للمبلغ ١٠٠ ، ف مقدار الفائدة بعد د سنة ، ل جملة المبلغ بعد تلك المدة فإن :

$$ف = \frac{م\ ر\ د}{١٠٠}$$

فإذا كان الزمن مقدراً بالأشهر (ش) فإن $ف = \frac{م\ ر\ ش}{١٢٠٠}$

أما إذا كان الزمن مقدراً بالأيام (ي) فإن $ف = \frac{م\ ر\ ي}{٣٦٠٠٠}$

كما أن $ل = م + ف = م \left(١ + \frac{ر\ د}{١٠٠} \right)$ ؛

$$م = \frac{١٠٠ \text{ ل}}{١٠٠ + \text{ر ن}}$$

الحسم . نفرض م القيمة الاسمية لسند تجاري ، ق قيمته الحالية ، $ح_{ت}$ الحسم الخارجي (التجاري) ، $ح_{ق}$ الحسم الداخلي (الحقيقي)

$$ح_{ت} = \frac{\text{م ر ن}}{١٠٠} \qquad ح_{ق} = \frac{\text{ق ر ن}}{١٠٠} = \frac{\text{م ر ن}}{١٠٠ + \text{ر ن}}$$

$$ح_{ت} - ح_{ق} = ح_{ق} \times \frac{\text{ر ن}}{١٠٠} \text{ ، } \frac{١}{ح_{ق}} - \frac{١}{ح_{ت}} = \frac{١}{م}$$

16. الفائدة المركبة

م رأس المال الأصلي ، حـ الفائدة السنوية لوحدة النقد $\left(حـ = \frac{ر}{١٠٠} \right)$ ،
ل جملة المبلغ بعد ن سنة :

$$ل = م \left(١ + حـ \right)^{ن}$$

فإذا كانت المدة هي ن سنة وجزء من السنة مقداره $\frac{هـ}{ط}$ فإن

$$ل = م \left(١ + حـ \right)^{ن} \left(١ + \frac{هـ}{ط} \right)$$

تكوين رأسمال بدفعات سنوية قيمة كلٍ منها د وعددها ن :

(1) رأس المال المتكون بعد الدفعة الأخيرة مباشرة (جملة الدفعات الاستهلاكية)

$$ك = \frac{د \left[(١ + حـ)^{ن} - ١ \right]}{حـ} \quad ؛ \quad د = \frac{\text{ك حـ}}{(١ + حـ)^{ن} - ١}$$

(2) رأس المال المتكون بعد سنة من الدفعة الأخيرة (جملة الدفعات الاستثمارية)

$$ك' = \frac{د(١+ح)[(١+ح)^{ن} - ١]}{ح} \quad ؛$$

$$د = \frac{ك'\,ح}{(١+ح)[(١+ح)^{ن} - ١]}$$

استهلاك دين قدره ق بدفعات سنوية قيمة كل منها د وعددها ن

$$ق = \frac{د\,[(١+ح)^{ن} - ١]}{ح\,(١+ح)^{ن}} = \frac{د\,[١ - (١+ح)^{-ن}]}{ح}$$

وهي القيمة الحالية للدفعات الاستهلاكية

$$د = \frac{ق\,ح\,(١+ح)^{ن}}{(١+ح)^{ن} - ١} = \frac{ق\,ح}{١ - (١+ح)^{-ن}}$$

17. النسبة والتناسب

النسبة هي $\frac{ب}{ح}$ والتناسب هو $\frac{ب}{ح} = \frac{ء}{هـ}$

خواص التناسب :

(1) $ب\,هـ = ح\,ء$ ، (2) $\frac{ب}{ء} = \frac{ح}{هـ}$

(3) $\frac{ب}{ح} = \frac{ب+ء}{ح+هـ} = \frac{ط\,ب \pm ن\,ء}{ط\,ح \pm ن\,هـ} = \sqrt{\frac{ط\,ب^{٢} + ن\,ء^{٢}}{ط\,ح^{٢} + ن\,هـ^{٢}}}$

حيث ط ، ن عددان يجعلان الجذر ممكناً .

(4) $\frac{ب \pm ح}{ح} = \frac{ء \pm هـ}{هـ}$

(5) $\frac{ب}{ح \pm ب} = \frac{ء}{هـ \pm ء}$

(6) $$\frac{\text{ب} + \text{حـ}}{\text{ب} - \text{حـ}} = \frac{\text{ء} + \text{هـ}}{\text{ء} - \text{هـ}}$$

18. المعادلات الجبرية

المعادلة من الدرجة الأولى $\text{ب س} = \text{حـ}$

(1) $\text{ب} \neq ٠$ حل وحيد هو $\text{س} = \dfrac{\text{حـ}}{\text{ب}}$

(2) $\text{ب} = ٠$ و $\text{حـ} \neq ٠$ لا يوجد حل .

(3) $\text{ب} = ٠$ و $\text{حـ} = ٠$ لا نهاية من الحلول ، أي عدد حقيقي هو حل .

المعادلة من الدرجة الثانية $\text{أ س}^{٢} + \text{ب س} + \text{حـ} = ٠ \quad (\text{أ} \neq ٠)$

(1) المميز $\text{ب}^{٢} - ٤\text{أحـ} = \Delta > ٠$ جذران حقيقيان هما

$$\text{س}_{١} = \frac{-\text{ب} + \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}}$$

$$\text{س}_{٢} = \frac{-\text{ب} - \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}}$$

(2) المميز $\Delta = ٠$ جذر حقيقي مضاعف $\text{س} = \dfrac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}$

(3) المميز $\Delta < ٠$ جذران عقديان هما

$$\text{س}_{١} = \frac{-\text{ب} + \text{ت}\sqrt{-\Delta}}{٢\text{أ}}$$

$$\text{س}_{٢} = \frac{-\text{ب} - \text{ت}\sqrt{-\Delta}}{٢\text{أ}}$$

العلاقة بين أمثال المعادلة والجذرين

$س_١ + س_٢ = - \frac{ب}{أ}$ (مجموع الجذرين)

$س_٢ . س_٢ = - \frac{حـ}{أ}$ (جداء الجذرين)

حل جملة معادلتين بمجهولين

$$\begin{cases} ب س + حـ ع = ء \\ ب' س + حـ' ع = ء' \end{cases} \qquad س = \frac{\begin{vmatrix} ب & ء \\ ب' & ء' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ب & حـ \\ ب' & حـ' \end{vmatrix}} ، \quad ع = \frac{\begin{vmatrix} ء & حـ \\ ء' & حـ' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ب & حـ \\ ب' & حـ' \end{vmatrix}}$$

بشرط أن يكون المخرج مغايراً للصفر . فإذا كان مساوياً للصفر وكان $ب ء' - ء ب' \neq ٠$ فلا يوجد حل .

أما إذا كان $ب ء' - ء ب' = ٠$ فللجملة لا نهاية من الحلول تُمثَّل بنقط المستقيم $ب س + حـ ع = ء$.

19. إشارة المقادير الجبرية

إن دراسة إشارة التابع تا (س) هي التعرف على تلك المجالات التي يكون فيها التابع موجباً أو يكون سالباً .

إشارة $ك_١$ (س) = ب س + حـ (ب $\neq$ ٠)

س	$-\infty$	$-\frac{حـ}{ب}$	$+\infty$
$ك_١$ (س)	عكس إشارة ب		مثل إشارة ب

إشارة $ك_٢$ (س) = أ $س^٢$ + ب س + حـ

(1) إذا كان المميز △ ≦ ٠ فإشارة $ك_٢$ (س) مثل إشارة أ .

(2) إذا كان المميز △ > ٠ فإن $ك_٢$ (س) ينعدم عند قيمتين $س_١$ و $س_٢$ ويكون

س	- ∞		$س_١$		$س_٢$		+ ∞
$ك_٢$ (س)		مثل إشارة أ	٠	عكس إشارة أ	٠	مثل إشارة أ	

2. الرياضيات المعاصرة

20. جبر القضايا

القضية هي جملة إخبارية تحتمل الصحة أو الخطأ . ونرمز للقضايا بالرموز ق ، ك ، ل ، . . . فإذا كانت القضية صحيحة نقرنها بالعدد ١ ونقرن القضية الخاطئة بالعدد ٠

القضية المركبة هي مجموعة من القضايا المرتبطة ببعضها بأدوات ربط تستخدم في اللغة العادية ، ولكننا سنحدد أدوات الربط هذه بدقة نتمكن من خلالها معرفة صحة أو خطأ القضية المركبة اعتماداً على صحة أو خطأ القضايا المكوِّنة للقضية المركبة .

أدوات الربط . **العطف** (و) رمزه $\wedge$

التخيير (أو) رمزه $\vee$.

النفي (لا) رمزه $\sim$

الاقتضاء المنطقي (إذا . . . . فإن) رمزه $\Rightarrow$

التكافؤ المنطقي (إذا وفقط إذا) رمزه $\Leftrightarrow$

جدول الصدق القضايا المرتبطة بأدوات الربط

ق	ك	~ ق	ق ∧ ك	ق ∨ ك	ق ⇐ ك	ق ⇔ ك
١	١	٠	١	١	١	١
١	٠	٠	٠	١	٠	٠
٠	١	١	٠	١	١	٠
٠	٠	١	٠	٠	١	١

إذا تطابق جدول الصدق (الخطأ والصواب) لقضية مركبة ص$_{١}$ (ق ، ك ، . . .) مع جدول الصدق لقضية مركبة أخرى ص$_{٢}$ (ق ، ك ، . . .) فإننا نكتب

ص$_{١}$ (ق ، ك ، . . .) ≡ ص$_{٢}$ (ق ، ك ، . . .)

ونقول إن ص$_{١}$ و ص$_{٢}$ **متكافئتان منطقياً** . ويكون جدول الصواب للقضية ص$_{١}$ (ق ، ك ، . . .) ⇐ ص$_{٢}$ (ق ، ك ، . . .) مساوياً الواحد وتسمى هذه القضية **مصدوقة** .

فإذا سمينا خ قضية خاطئة دوماً وسمينا ص قضية صحيحة دوماً فإن قواعد جبر القضايا تكون كما يلي :

(اللا نمو)

ق ∧ ق ≡ ق   ق ∨ ق ≡ ق

(التجميع)

(ق ∧ ك) ∧ ل ≡ ق ∧ (ك ∧ ل)

(ق ∨ ك) ∨ ل ≡ ق ∨ (ك ∨ ل)

(التبديل)

ق ∧ ك ≡ ك ∧ ق

ق ∨ ك ≡ ك ∨ ق

(التوزيع)

ق ∧ (ك ∨ ل) ≡ (ق ∧ ك) ∨ (ق ∧ ل)

ق ∨ (ك ∧ ل) ≡ (ق ∨ ك) ∧ (ق ∨ ل)

(الحيادي)

ق ∧ ص ≡ ق ، ق ∧ خ ≡ خ

ق ∨ خ ≡ ق ، ق ∨ ص ≡ ص

(المتمم)

ق ∧ ~ق ≡ خ

~خ ≡ ص ، ~ص ≡ خ

ق ∨ ~ق ≡ ص

~ ~ق ≡ ق

(دومورغان)

~ (ق ∧ ك) ≡ ~ ق ∨ ~ ك

~ (ق ∨ ك) ≡ ~ ق ∧ ~ ك

21. المتغيرات والـ «مهما يكن ، يوجد»

عندما تحتوي قضية ق على متغير س حيث نكتب ق (س) ، فإن صحة أو خطأ هذه القضية يرتبط بقيمة (أو نوع) المتغير س . وهكذا فالقضية «س^{٢} + ٢ = ١١» صحيحة فقط إذا كان س عدداً حقيقياً مساوياً ٣ أو −٣ ، وخاطئة إذا أخذت س أي قيمة عددية أخرى (حقيقية كانت أو عقدية) . ونلاحظ

هنا أننا حددنا ضمناً أن المتغير س يأخذ قيماً عددية نسميها **مجموعة المتغير** س ، كي تصبح القضية ذات معنى ، إذ لو وضعنا «مثلث» بدلاً من «س» لأصبحت القضية

«(مثلث)^{٢} + ٢ = ١٢»

غير ذات معنى .

الرمز ∀ يعني «مهما يكن» ويستخدم للاشارة الى صحة قضية ق (س) من أجل أي س من مجموعة ع (مجموعة المتغير س) ، ونكتب : ∀ س من ع فإن ق (س) صحيحة .

الرمز ∃ يعني «يوجد» ويستخدم للدلالة على صحة قضية ق (س) من أجل س ما من ع ، ونكتب : ∃ س من ع بحيث ق (س) صحيحة .

22. المجموعات

المجموعة كلمة ذات مدلول لغوي عادي ، إذ نقول مجموعة طلاب ومجموعة أشجار ومجموعة أشياء ، وقد انتقل هذا المفهوم إلى الرياضيات وأصبح للمجموعة كياناً خاصاً عندما بدأنا نتعامل مع هذا المفهوم وفق منطق رياضي وباستخدام أدوات رياضية .

الانتماء إذا كانت سه مجموعة أشياء وكان س واحداً منها قلنا إن س هو **عنصر** من سه ونكتب س ∈ سه ونقرأ س **ينتمي** إلى سه . فإذا لم يكن عنصراً من سه نقول إن س **لا ينتمي** إلى سه ونكتب س ∉ سه .

تعيين المجموعة يتم بكتابة جميع عناصر المجموعة داخل قوسين بالشكل

سه = { هـ ، + ، ★ ، ٦ }

أو بايراد خاصة نتمكن بواسطتها من التعرف على عناصر المجموعة ، ومعرفة فيما إذا كان عنصر ما ينتمي للمجموعة أو لا ينتمي .

المجموعة وحيدة العنصر هي مجموعة تحوي عنصراً واحداً ونكتبها بالشكل سـ = { ب } .

المجموعة الخالية $\varnothing$ هي تلك المجموعة التي لا تحوي أي عنصر .

المجموعة الكلية النسبية كـ هي مجموعة جميع العناصر قيد الدرس .

مجموعة مجموعات هي المجموعة التي كل عنصر من عناصرها مجموعة .

تساوي مجموعتين إذا رمزنا لمجموعة ما بـ سـ ورمزنا لها أيضاً بـ صـ نكتب سـ = صـ ونعبر عن ذلك رياضياً بالشكل

$$\forall \text{ س } \in \text{ صـ } \Leftrightarrow \text{ س } \in \text{ سـ}$$

الاحتواء نقول إن سـ محتواة في صـ ونكتب

$$\forall \text{ س } \in \text{ سـ } \Leftarrow \text{ س } \in \text{ صـ}$$

لاحظ أنه يمكن أن يوجد في صـ عنصر أو أكثر لا ينتمي إلى سـ. نسمي سـ **مجموعة جزئية** من صـ .

جمع مجموعتين سـ و صـ هو مجموعة تتكون من جميع عناصر سـ وجميع عناصر صـ ونكتب سـ $\cup$ صـ .

تقاطع مجموعتين سـ و صـ هو مجموعة تتكون من جميع العناصر المنتمية إلى سـ و صـ معاً وتكتب سـ $\cap$ صـ .

فرق مجموعتين سـ و صـ هو المجموعة سـ / صـ المكونة من جميع العناصر المنتمية إلى سـ وغير المنتمية إلى صـ .

تكافؤ مجموعتين نقول إن سـ و صـ متكافئتان ونكتب سـ $\approx$ صـ إذا وفقط إذا أمكن مقابلة كل عنصر من الأولى بعنصر واحد من الثانية وبالعكس .

متمم مجموعة سـ بالنسبة للمجموعة الكلية النسبية كـ هو المجموعة كـ / سـ ونرمز لها بـ سـ′ .

قوانين جبر المجموعات

العمليات الأساسية

$(\text{سـ}')' = \text{سـ}$ ، $\varnothing' = \text{كـ}$ ، $\text{كـ}' = \varnothing$

$\text{سـ} / \text{سـ} = \varnothing$ ، $\text{سـ} / \varnothing = \text{سـ}$ ، $\text{سـ} \cup \text{كـ} = \text{كـ}$

$\text{سـ} \cup \varnothing = \text{سـ}$ ، $\text{سـ} \cap \text{كـ} = \text{سـ}$ ، $\text{سـ} / \text{عـ} = \text{سـ} \cap \text{عـ}'$

$\text{سـ} \cap \varnothing = \varnothing$ ، $\text{سـ} \cup \text{سـ} = \text{سـ}$ ، $\text{سـ} \cap \text{سـ} = \text{سـ}$

$\text{سـ} \cup \text{سـ}' = \text{كـ}$ ، $\text{سـ} \cap \text{سـ}' = \varnothing$

التجميع

$$(\text{سـ} \cup \text{عـ}) \cup \text{صـ} = \text{سـ} \cup (\text{عـ} \cup \text{صـ})$$

$$(\text{سـ} \cap \text{عـ}) \cap \text{صـ} = \text{سـ} \cap (\text{عـ} \cap \text{صـ})$$

التبديل

$\text{سـ} \cup \text{عـ} = \text{عـ} \cup \text{سـ}$ ، $\text{سـ} \cap \text{عـ} = \text{عـ} \cap \text{سـ}$

التوزيع

$$\text{سـ} \cup (\text{عـ} \cap \text{صـ}) = (\text{سـ} \cup \text{عـ}) \cap (\text{سـ} \cup \text{صـ})$$

$$\text{سـ} \cap (\text{عـ} \cup \text{صـ}) = (\text{سـ} \cap \text{عـ}) \cup (\text{سـ} \cap \text{صـ})$$

دومورغان

$$(\text{م} \cup \text{عـ})' = \text{سـ}' \cap \text{عـ}'$$

$$(\text{سـ} \cap \text{عـ})' = \text{سـ}' \cup \text{عـ}'$$

سـ / (ع ∪ صـ) = (سـ / ع) ∩ (سـ / صـ)

سـ / (ع ∩ صـ) = (سـ / ع) ∪ (سـ / صـ)

الزوج المرتَّب (الثنائية المرتبة) هو كائن رياضي مكون من عنصرين مرتبين س ونسميه المسقط الأول و ع ونسميه المسقط الثاني ونكتبه بالشكل (س ، ع) ولما كنا نراعي الترتيب فإن (س ، ع) ≠ (ع ، س) كما أن

(س ، ع) = (سـ ، ب) ⇔ س = أ ∧ ع = ب

الثلاثي المرتَّب هو كائن رياضي نعرفه بصورة مشابهة للزوج المرتب ونكتبه بالشكل (أ ، ب ، حـ) .

المرتّب من ر هو كائن رياضي (عنصر) مكون من ر عنصراً مرتباً ونكتبه كما يلي : (س١ ، س٢ ، . . . ، سر) ويتساوى مرتّبان من ر إذا وفقط إذا تساوت مركباتهما المتقابلة .

جداء مجموعتين (الجداء الديكارتي) إن جداء المجموعتين سـ و ع بالتعريف هو مجموعة جميع الثنائيات المرتبة (أ ، ب) بحيث أ ∈ سـ و ب ∈ ع ونكتب

سـ × ع = { (أ ، ب) : أ ∈ أ و ب ∈ ع }

ويبدو واضحاً أن أ × ع لا يساوي بالضرورة ع × أ .

جداء المجموعات سـ١ ، سـ٢ ، . . . ، أر هو مجموعة المرتّبات من ر أي (أ١ ، أ٢ ، . . . ، أر) بحيث أ١ ∈ سـ١ ، . . . ، أر ∈ سـر.

العلاقة الثنائية ر بين عناصر مجموعة سـ وأخرى ع هي عملية ربط بين عنصر س ∈ سـ بآخر ع ∈ ع ونكتب س ر ع . وهكذا نحصل **وفق** ر على أزواج مرتَّبة من الشكل

(س ، ع) ∈ سـ × ـع

ونقول عندئذٍ إن ر هي مجموعة جزئية من سـ × ـع ونسمي سـ **منطلقَ** العلاقة و ـع **مستقرَّها** . فإذا كانت سـ = ـع قلنا إن ر معرّفة على المجموعة سـ .

لتكن ر علاقة ثنائية معرفة على المجموعة سـ ولتكن س ، ع ، ص ثلاثة عناصر ما من سـ فإن :

ر **إنعكاسية** إذا وفقط إذا كان س ر س .

ر **تناظرية** إذا وفقط إذا كان س ر ع ⇐ ع ر س .

ر **متعدية** إذا وفقط إذا كان

س ر ع و ع ر ص ⇐ س ر ص .

ر **تخالفية** إذا وفقط إذا كان

س ر ع و ع ر س ⇐ س = ع .

أنواع العلاقات

(1) **علاقة التكافؤ** هي علاقة ر معرّفة على سـ بحيث تكون ر انعكاسية وتناظرية ومتعدية . تقسم علاقة التكافؤ المجموعة سـ إلى مجموعات تسمى **أصناف التكافؤ** وفق ر ، بحيث تنتمي جميع العناصر المرتبطة بعلاقة التكافؤ إلى صنف واحد يكفي تمثيله بعنصر واحد .

(2) **علاقة الترتيب** هي علاقة ر معرّفة على سـ بحيث تكون ر إنعكاسية ومتخالفة ومتعدية .

23. التطبيقات (التوابع)

التطبيق (التابع) تا هو تلك القاعدة التي تمكننا من مقابلة كل عنصر س ∈ سـ بعنصر واحد ع ∈ ـع ونكتب

تا : سـ ← ع أو تا : س ← ع = تا (س)

ونقول إن هذا التابع معرّف على **سـ المنطلَق** ويأخذ قيمة في ع **(المستقر)** ، كما نسمي ع **صورة** س وفق تا ونسمي س **أصل** ع وفق تا .

التطبيقان المتساويان . نقول إن التطبيقين تا و ها متساويان ونكتب تا = ها إذا كان لهما نفس المنطلق وكان تا (س) = ها (س) من أجل أي س ∈ سـ .

التطبيق الغامر تا : سـ ← ع هو ذلك التطبيق المحقق للشرط التالي :

∀ ع ∈ ع E س ∈ سـ : تا (س) = ع .

التطبيق المتباين تا : أ ← ع هو ذلك التطبيق الذي يحقق الشرط : إذا كان $س_1$ ، $س_2$ عنصرين مختلفين من سـ فإن تا($س_1$) ≠ تا ($س_2$) .

ملاحظة يمكن صياغة هذا الشرط بصورة مكافئة كما يلي : إذا كان تا ($س_1$) = تا ($س_2$) فإن $س_1$ = $س_2$.

التقابل تا : سـ ← ع هو تطبيق غامر ومتباين .

التطبيق المطابق م : سـ ← سـ هو التطبيق المعرف كما يلي : م (س) = س من أجل أي س ∈ سـ . لاحظ أن م هو تقابل .

التطبيق الثابت ث : سـ ← ع هو التطبيق الذي يقابل أي عنصر من سـ بعنصر وحيد من ع .

الصورة المباشرة والصورة العكسية ليكن تا : سـ ← ع ولتكن صـ ⊂ سـ فإن الصورة المباشرة تا(صـ) للمجموعة صـ غير تا هي مجموعة جميع صور عناصر صـ عبر تا . ويكون تا(صـ) ⊂ ع .

الصورة العكسية لمجموعة ب ⊃ ع هي مجموعة جزئية ف من س بحيث تا (ف) = ب . ونعبر عن الصورة العكسية للمجموعة ب بالرمز

تا $^{-1}$ (ب) = ف

التقابل العكسي إذا كان تا : س ← ع تقابلاً فإنه يمكن الحصول على **التقابل العكسي** بمقابلة كل عنصر ع من ع بأصله (أي بذلك العنصر س بحيث تا (س) = ع .

تركيب التطبيقات ليكن تا : س ← ع و ها : ع ← ص

إن ذلك يمكننا من مقابلة كل عنصر س ∈ س بعنصر واحد ص ∈ ص وهذا يعرّف تطبيقاً جديداً من س إلى ص نسميه **مركّب التطبيقين** تا و ها (أو جداء التطبيقين) ونرمز له بالشكل

ها ○ تا : س ← ص

لاحظ أن التطبيق ها يرد بعد تا على الرغم من كتابته أولاً ، ويتضح ذلك من التعبير عن الصورة ص بالشكل

ها (تا (س)) = ها (ع) = ص

ونلاحظ هنا أن ها (تا (س)) لا يساوي بالضرورة تا (ها (س))، إذ قد لا يكون ها معرفاً أصلاً على س .

ومن أهم خواص التطبيقات :

لا ○ (ها ○ تا) = (لا ○ ها) ○ تا   تا ○ م = م ○ تا = تا

تا ○ تا $^{-1}$ = م = تا $^{-1}$ ○ تا

بفرض تا تقابل .

24. الزمرة ، الحلقة ، الحقل

قانون التشكيل الداخلي على سـ هو تطبيق

$$د : سـ \times سـ \leftarrow سـ$$

يقابل كل زوج مرتب (س ، ع) $\in$ سـ $\times$ سـ بعنصر من سـ نرمز له بـ س $\oplus$ ع ونكتب

$$د \,[\, (س ، ع) \,] = س \oplus ع$$

قانون التشكيل الخارجي على سـ هو تطبيق

$$خ : ح \times سـ \leftarrow سـ$$

يقابل كل زوج مرتب (ل ، س) بعنصر ينتمي إلى سـ نرمز له بـ ل $\odot$ س ونكتب

$$خ (ل ، س) = ل \odot س$$

الزمرة هي مجموعة سـ غير خالية مزودة بقانون تشكيل داخلي $\oplus$ على سـ بحيث تتحقق الشروط التالية من أجل أي عناصر س ، ع ، ص من سـ :

(1) (س $\oplus$ ص) $\oplus$ ع = س $\oplus$ (ص $\oplus$ ع)

(2) يوجد عنصر ى $\in$ سـ نسميه العنصر المحايد بحيث

$$س \oplus ى = ى \oplus س = س$$

(3) يوجد عنصر معاكس (نظير) نرمز له بـ س′ لكل س بحيث

$$س' \oplus س = س \oplus س' = ى$$

فإذا حقق القانون $\oplus$ الخاصة التبديلية قلنا إن **الزمرة تبديلية (آبلية)**

الخواص البسيطة للزمرة .

إذا كانت س ، ص ، ع $\in$ سـ وكانت (سـ ، $\oplus$) زمرة فإن :

(1) (قانونا الاختصار)

س $\oplus$ ص = س $\oplus$ ع $\Leftarrow$ ص = ع

ص $\oplus$ س = ع $\oplus$ س $\Leftarrow$ ص = ع

(2) إذا كان أ $\oplus$ س = ب فإن س = أ$'$ $\oplus$ ب كما أن

س $\oplus$ أ = ب $\Leftarrow$ س = ب $\oplus$ أ$'$

(3) (س$'$)$'$ = س ، (س $\oplus$ ص)$'$ = ص$'$ $\oplus$ س$'$

(4) إذا عرّفنا س^{ط} = س $\oplus$ س $\oplus$ .... $\oplus$ س (ط مرّة)

فإن س^{ط} $\oplus$ س^{د} = س$^{ط+د}$

الزمرة الجزئية . بفرض (سـ ، $\oplus$) هي زمرة و سـ$'$ $\subseteq$ سـ فإن (سـ$'$ ، $\oplus$) تشكل **زمرة جزئية** من سـ (بفرض سـ$'$ $\neq \emptyset$) إذا وفقط إذا كانت سـ$'$ مغلقة بالنسبة للقانون $\oplus$ أي

$\forall$ س ، ع $\in$ سـ$'$ $\Leftarrow$ س $\oplus$ ع $\in$ سـ$'$

وكانت سـ$'$ تحوي العنصر المعاكس (النظير) لكل عنصر من عناصرها .

نظريات حول الزمرة الجزئية . (1) بفرض سـ$'$ $\subseteq$ سـ فإن (سـ$'$ ، $\oplus$) هي زمرة جزئية من (سـ ، $\oplus$) إذا وفقط إذا كان أ$'$ $\oplus$ ب $\in$ سـ$'$ من أجل أي أ و ب $\in$ سـ$'$.

(2) ليكن أ عنصراً من سـ فإن

سـ$'$ = { أ^{د} : د عدد صحيح }

تشكل زمرة جزئية من (سـ ، $\oplus$)

الحلقة هي مجموعة غير خالية سہ مزودة بقانوني تشكيل داخليين ه و T بحيث تتحقق الشروط التالية من أجل أي ثلاثة عناصر س ، ع ، ص ∈ سہ :

(1) (س ه ع) ه ص = س ه (ع ه ص)
(2) س ه ع = ع ه س
(3) يوجد في سہ عنصر ى بحيث س ه ى = س .
(4) يوجد في سہ عنصر س′ مقبل كل س بحيث س′ ه س = ى
(5) (س T ع) T ص = س T (ع T ص)
(6) س T (ع ه ص) = (س T ع) ه (س T ص)
(7) (س ه ع) T ص = (س T ص) ه (ع T ص)
إذا كانت T تبديلية قلنا إن الحلقة تبديلية .

الحقل هو مجموعة غير خالية سہ مزودة بقانوني تشكيل داخليين ه و T بحيث (سہ ، ه ، T) حلقة تبديلية و (سہ/ {ى} ، T) زمرة ، بفرض أن ى هو العنصر الحيادي للزمرة (سہ ، ه) .

3 . الهندسة المستوية

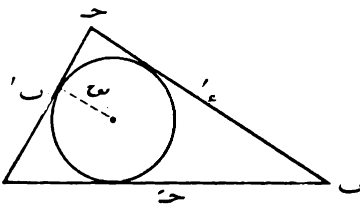
المربع

المحيط ٤ ل ، **المساحة** ل^{٢} ، ل طول الضلع .

المستطيل

المحيط ٢ (ل + ع) ، **المساحة** ل ع ، الطول ل ، العرض ع .

المثلث



المحيط ب′ + حـ′ + ء′ = ٢ ط

المساحة تعطى بإحدى العبارات التالية :

$\frac{١}{٢}$ ب′ . ع$_{ب}$ (ع$_{ب}$ الارتفاع المتعلق بالرأس ب)

$\frac{1}{\text{٤ نق}}$ ب′ حـ′ ء′ ، ط ع

$\frac{1}{\text{٢}}$ ب′ حـ′ حب ء ، $\frac{1}{\text{٢}}$ ب′٢ $\frac{\text{حب حـ حب ء}}{\text{حب ب}}$

$\sqrt{\text{ط(ط − ب′)(ط − حـ′)(ط − ء′)}}$

علاقات إضافية في المثلث

ع = (ط − ب′) ظل $\frac{\text{ب}}{\text{٢}}$ ، $\text{ع}_{\text{ب}}$ = ط ظل $\frac{\text{ب}}{\text{٢}}$

($\text{ع}_{\text{ب}}$ نصف قطر الدائرة المماسة خارجاً والمحصورة ضمن الزاوية ب)

ب′٢ = حـ′٢ + ء′٢ − ٢حـ′ ء′ تجب ب

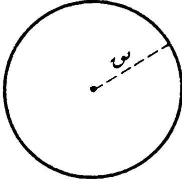
علاقة الجيوب $\frac{\text{ب}'}{\text{حب ب}}$ = $\frac{\text{حـ}'}{\text{حب حـ}}$ = $\frac{\text{ء}'}{\text{حب ء}}$ = ٢ نق

ملاحظة هامة : يمكن كتابة علاقات مشابهة لما ورد أعلاه باستخدام قاعدة التبديل الدوري فنكتب مثلاً من أجل العلاقة

$\frac{1}{\text{٢}}$ ب′ حـ′ حب ء علاقتين إضافيتين هما

$\frac{1}{\text{٢}}$ حـ′ ء′ حب ب و $\frac{1}{\text{٢}}$ ء′ ب′ حب حـ .

الدائرة



المحيط ٢ π س ، المساحة π س٢

س يه طول قوس يقابل زاوية مركزية يه مقاسة بالراديان .

مساحة قطاع دائري طول قوسه ل هي $\frac{١}{٢}$ ل س .

الرباعي المرسوم في دائرة

المحيط ب′ + ح′ + ء′ + هـ′ = ٢ ط (مجموع أطوال أضلاعه)

المساحة $\sqrt{(ط - ب')(ط - ح')(ط - ء')(ط - هـ')}$

الرباعي المحيط بدائرة تمس أضلاعه

المحيط ب′ + ح′ + ء′ + هـ′ = ٢ ط (مجموع أضلاعه)

المساحة $\sqrt{ب' ح' ء' هـ'}$ أو ط س (س نصف قطر الدائرة المماسة)

شبه المنحرف

المحيط مجموع أضلاعه ، المساحة $\frac{١}{٢}$ الارتفاع × مجموع القاعدتين

المضلعات المنتظمة المرسومة داخل دائرة

ملاحظة نستخدم فيما يلي الرموز التالية :

ط : **المحيط** ، **ح** : **المساحة** ، **س** : **نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المضلع** .

عا : **العامد** وهو طول العمود المنشأ من المركز على أحد الأضلاع .

المثلث

$$ط = ٣ س \sqrt{٣} \text{ ، } ح = \frac{٣ س^{٢} \sqrt{٣}}{٤} \text{ ، } عا = \frac{س}{٢}$$

المربع

$$ط = ٤ س \sqrt{٢} \text{ ، } ح = ٢ س^{٢} \text{ ، } عا = \frac{س}{\sqrt{٢}}$$

المخمس المحدب

$$ط = \frac{٥ س}{٢} \sqrt{١٠ - ٢\sqrt{٥}} \text{ ، } ح = \frac{٥ س^{٢}}{٨} \sqrt{١٠ + ٢\sqrt{٥}} \text{ ، }$$

$$عا = \frac{س}{٤} (\sqrt{٥} + ١)$$

المخمس النجمي

$$\text{ط} = \frac{\text{٥ س}}{\text{٢}} \sqrt{\text{١٠} + \text{٢}\sqrt{\text{٥}}}\ \text{،}$$

$$\text{عا} = \frac{\text{س}}{\text{٤}} \left(\sqrt{\text{٥}} - \text{١}\right)$$

المسدس

$$\text{ط} = \text{٦ س}\ \text{،} \quad \text{ح} = \frac{\text{٣ س}^{\text{٢}} \sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}\ \text{،} \quad \text{عا} = \frac{\text{س} \sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$$

المثمن المحدب

$$\text{ط} = \text{٨ س} \sqrt{\text{٢} - \sqrt{\text{٢}}}\ \text{،} \quad \text{ح} = \text{٢ س}^{\text{٢}} \sqrt{\text{٢}}\ \text{،}$$

$$\text{عا} = \frac{\text{س}}{\text{٢}} \sqrt{\text{٢} + \sqrt{\text{٢}}}$$

المثمن النجمي

$$\text{ط} = \text{٨ س} \sqrt{\text{٢} + \sqrt{\text{٢}}}\ \text{،} \quad \text{عا} = \frac{\text{س}}{\text{٢}} \sqrt{\text{٢} - \sqrt{\text{٢}}}$$

المعشر المحدب

ط = ٥ س (√٥ − ١)،   ح = $\frac{\text{٥ س}^{٢}}{\text{٤}}$ √(١٠ − ٢√٥)،

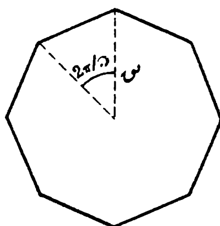
عا = $\frac{\text{س}}{\text{٤}}$ √(١٠ + ٢√٥)

الاثنا عشري المحدب

ط = ٦ س (√٦ − √٢)،   ح = ٣ س^٢^،

عا = $\frac{\text{س}}{\text{٤}}$ (√٦ + √٢)

المضلع المنتظم ذو هـ ضلعاً

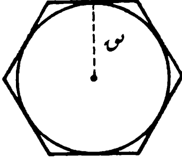


ط = ٢ هـ س جب $\frac{\pi}{\text{هـ}}$ ،

ح = $\frac{\text{هـ س}^{٢}}{\text{٢}}$ جب $\frac{\text{٢}\pi}{\text{هـ}}$

المضلع المنتظم ذو ن ضلعاً

المحيط بدائرة



$$ط = ٢ \, ن \, س \, طل \frac{\pi}{ن} \quad ،$$

$$ح = ن \, س^{٢} \, طل \frac{\pi}{ن}$$

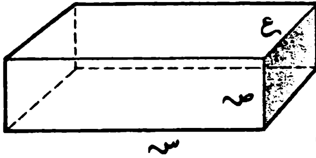
(س نصف قطر الدائرة المماسة)

4 . الهندسة المجسمة

المكعب

المساحة ٦ ل^{٢} ،   الحجم ل^{٣} (ل طول الضلع)

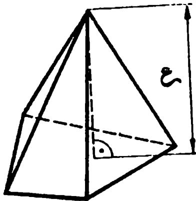
متوازي المستطيلات



المساحة ٢(س ع + ع ص + س ص)

الحجم س ص ع

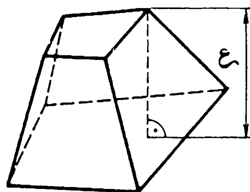
الهرم



المساحة = مساحة القاعدة + المساحة الجانبية

الحجم = $\frac{١}{٤}$ مساحة القاعدة × ع (ع الارتفاع)

جذع الهرم



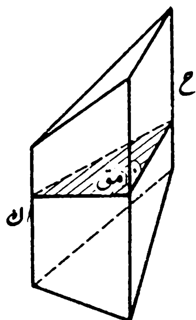
المساحة = ق + ق′ + حـ

ق ، ق′ مساحتا القاعدتين

حـ المساحة الجانبية

الحجم $\frac{ع}{٣}$ (ق + ق′ + $\sqrt{ق\ ق′}$)

الموشور



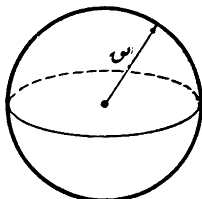
المساحة ق + ق′ + حـ

الحجم $\frac{مق}{٣}$ (ك + ل + ح)

مق : مساحة المقطع القائم ،

ك ، ل ، ح أطوال الأحرف المتوازية .

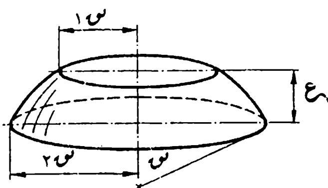
الكرة



المساحة ٤ π $س^{٢}$

الحجم $\frac{٤}{٣}$ π $س^{٣}$

الحزام الكروي



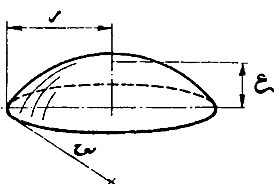
هو المنطقة المحصورة

بين مستويين متوازيين

المساحة الجانبية ٢π س ع

الحجم $\frac{\pi \, ع}{٦} (٣ س_١^٢ + ٣ س_٢^٢ + ع^٢)$

القبة الكروية



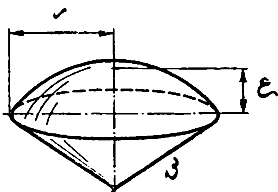
مساحة القبة π $(ع^٢ + ر^٢)$

أو $(٢ \pi$ س ع$)$

الحجم $\frac{١}{٣} \pi ع^٢ (٣ س - ع)$

العلاقة بين س ور هي $ر = \sqrt{ع(٢ س - ع)}$

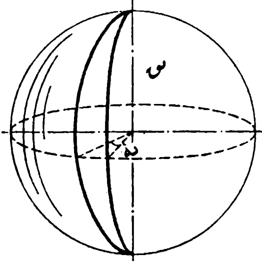
القطّاع الكروي



المساحة الكلية π س$[٢ ع + ر]$

الحجم $\frac{٢ \pi}{٣}$ $س^٢$ ع

الحز الكروي



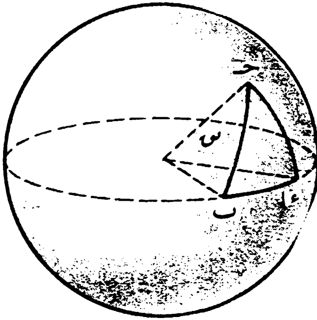
هو المنطقة المحصورة بين مستويين فصلهما المشترك أحد أقطار الكرة .

مساحة الجزء المحدب $\frac{\pi\, س^{2}}{90}$ ه

(ه زاوية الحز بالدرجات)

الحجم $\frac{\pi\, س^{3}}{270}$ ه

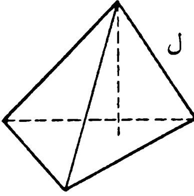
المثلث الكروي



المساحة $\frac{\pi\, س^{2}}{180}$ (ب + حـ + ء − ١٨٠)

ب ، حـ ، ء زوايا المثلث الكروي .

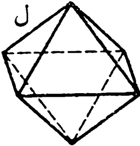
رباعي الوجوه المنتظم



المساحة $ل^{٢}\sqrt{٣}$ ،

الحجم $\frac{ل^{٣}\sqrt{٢}}{١٢}$

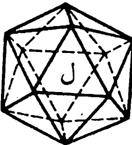
ثماني الوجوه المنتظم



كل وجه هو مثلث متساوي الأضلاع

المساحة $٢\ ل^{٢}\sqrt{٣}$ ، الحجم $\frac{ل^{٣}\sqrt{٢}}{٣}$

عشروني الوجوه المنتظم

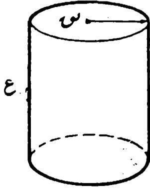


كل وجه هو مثلث متساوي الأضلاع

المساحة $٥\ ل^{٢}\sqrt{٣}$

الحجم $\frac{٥\ ل^{٣}}{١٢}(٣ + \sqrt{٥})$

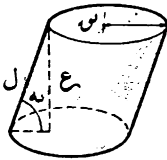
الأسطوانة الدائرية القائمة



المساحة الجانبية 2π نق ع ،

الحجم π نق^2 ع

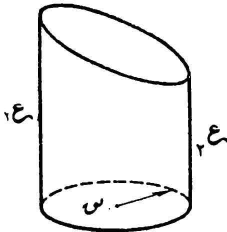
الأسطوانة الدائرية المائلة



المساحة الجانبية 2π نق ل

الحجم π نق^2 ع أو π نق^2 ل جـ هـ

الأسطوانة الدائرية القائمة المقطوعة



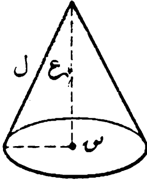
المساحة الجانبية π نق(ع$_1$ + ع$_2$)

الحجم $\frac{\pi \text{ نق}^2}{2}$ (ع$_1$ + ع$_2$)

مساحة القاعدة المائلة

$$\pi \text{ نق} \sqrt{\text{نق}^2 + \frac{1}{4}(\text{ع}_1 - \text{ع}_2)^2}$$

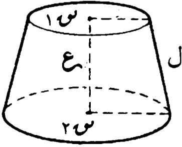
المخروط الدوراني



المساحة الجانبية $\pi \; \text{نق} \; \text{ل}$

الحجم $\frac{١}{٣} \; \pi \; \text{نق}^{٢} \; \text{ع}$

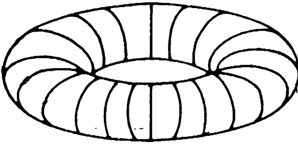
جذع المخروط الدوراني

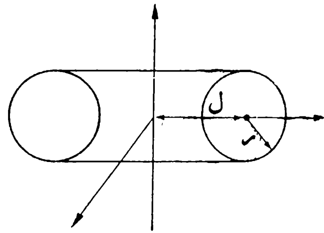


المساحة الجانبية $\pi \; \text{ل} (\text{نق}_{١} + \text{نق}_{٢})$

الحجم $\frac{\pi \; \text{ع}}{٣} (\text{نق}_{١}^{٢} + \text{نق}_{٢}^{٢} + \text{نق}_{١} \; \text{نق}_{٢})$

الحلقة (الطّارة)





المساحة $= \pi \; (\text{نق}_{١}^{٢} - \text{نق}_{٢}^{٢}) = ٤ \; \pi \; \text{ل} \; \text{س}$

الحجم $= \frac{\pi^{٢}}{٤} \; (\text{نق}_{١} + \text{نق}_{٢}) \; (\text{نق}_{١} - \text{نق}_{٢})^{٢} = ٢ \; \pi^{٢} \; \text{ل} \; \text{س}^{٢}$

$\text{نق}_{١} = \text{ل} + \text{س}$ ؛ $\text{نق}_{٢} = \text{ل} - \text{ر}$

5. الهندسة التحليلية

المعطيات ، المصطلحات	المعادلات ، النواتج
$\text{د}_{١}\ (\text{س}_{١} ، \text{ع}_{١})$ $\text{د}_{٢}\ (\text{س}_{٢} ، \text{ع}_{٢})$	$\text{د}_{١}\text{د}_{٢} = \sqrt{(\text{س}_{١} - \text{س}_{٢})^{٢} + (\text{ع}_{١} - \text{ع}_{٢})^{٢}}$ ميل $\text{د}_{١}\text{د}_{٢} = \frac{\text{ع}_{٢} - \text{ع}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$
د نقطة قاسمة داخلاً للقطعة $\text{د}_{١}\text{د}_{٢}$ بنسبة هـ	$\text{س}_{\text{د}} = \frac{\text{هـ}\ \text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}{\text{هـ} - ١}$ ، $\text{ع}_{\text{د}} = \frac{\text{هـ}\ \text{ع}_{٢} - \text{ع}_{١}}{\text{هـ} - ١}$
م منتصف $\text{د}_{١}\text{د}_{٢}$	$\text{س}_{\text{م}} = \frac{\text{س}_{١} + \text{س}_{٢}}{٢}$ ، $\text{ع}_{\text{م}} = \frac{\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢}}{٢}$
المستقيم الميل م ويمر بالنقطة $(\text{س}_{٠} ، \text{ع}_{٠})$	$\text{ع} - \text{ع}_{٠} = \text{م}\ (\text{س} - \text{س}_{٠})$

المعطيات ، المصطلحات	المعادلات ، النواتج
مار بالنقطتين $د_{١}$ ، $د_{٢}$	$\frac{ع - ع_{١}}{ع_{٢} - ع_{١}} = \frac{س - س_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$
يقطع من محور السينات طولاً جبرياً أ ومن محور العينات طولاً جبرياً ب	$\frac{س}{أ} + \frac{ع}{ب} = ١$
مستقيمان ميلاهما م ، م′	$م\,م' = -١$ ⇐ متعامدان $م = م'$ ⇐ متوازيان
هـ الزاوية بينهما	$ظل\ هـ = \frac{م - م'}{١ + م\,م'}$
المستقيم $أس + ب\,ع + حـ = ٠$	$م = - \frac{أ}{ب}$
ل بعد د $(س_{٠} ، ع_{٠})$ عن المستقيم	$ل = \frac{\left| أس_{٠} + ب\,ع_{٠} + حـ \right|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}}$

الدائرة

المركز م (ب ، حـ) نق نصف القطر	$(س - ب)^{٢} + (ع - حـ)^{٢} = نق^{٢}$

القطع المكافئ

الذروة م (ب ، حـ) الوسيط ط	$(ع - حـ)^{٢} = ٢\,ط\,(س - ب)$ فم القطع مفتوح لليمين
محور القطع يوازي م س	$(ع - حـ)^{٢} = -٢\,ط\,(س - ب)$ فم القطع مفتوح لليسار

المعطيات ، المصطلحات	المعادلات ، النواتج
الذروة م (ب ، حـ) الوسيط ط محور القطع يوازي م ع	نبادل موقعي س و ع في المعادلتين السابقتين .
القطع الناقص	
ب نصف المحور السيني حـ نصف المحور العيني (س. ، ع.) مركز القطع	$\frac{(س - س_٠)^٢}{ب^٢} + \frac{(ع - ع_٠)^٢}{حـ^٢} = ١$ $ى^٢ = ب^٢ - حـ^٢$
محورا القطع موازيان لمحوري الاحداثيات	التباعد المركزي $عد = \frac{ى}{ب} < ١$ المساحة $= \pi$ ب حـ المحيط (تقريباً) $= ٢ \pi \sqrt{\frac{١}{٢}(ب^٢ + حـ^٢)}$ المحرقان (س. + ى ، ع.) ، (س. - ى ، ع.)
القطع الزائد	
ب نصف المحور السيني حـ نصف المحور العيني (س. ، ع.) مركز القطع	$\frac{(س - س_٠)^٢}{ب^٢} - \frac{(ع - ع_٠)^٢}{حـ^٢} = ١$ $ى^٢ = ب^٢ - حـ^٢$
محورا القطع موازيان لمحوري الاحداثيات	التباعد المركزي $عد = \frac{ى}{ب} > ١$ المحرقان (س. + ى ، ع.) ، (س. - ى ، ع.)

6. التحليل الرياضي

المتتاليات

المتتالية هي تطبيق معرف على مجموعة الأعداد الطبيعية ويأخذ قيمه في مجموعة الأعداد الحقيقية . تُعرّف المتتالية بحدها العام $ح_د = ح(د)$ الذي يمكننا من معرفة جميع حدود المتتالية .

المتتالية الحسابية هي المتتالية

ب ، ب + ى ، ب + ٢ ى ، . . .

نسمي ب حدها الأول ، ى أساسها .

حدها العام $ح_د = ب + (د - ١) ى$

مجموع ك حداً $د = \frac{ك}{٢} [٢ ب + (ك - ١) ى]$

المتتالية الهندسية هي المتتالية ب ، ب ر ، ب $ر^٢$

نسمي ب الحد الأول ، ر أساس المتتالية

الحد العام $ح_د = ب ر^{د-١}$

مجموع ك حداً $= ب \frac{ر^ك - ١}{ر - ١}$

إذا كان | ر | > ١ فإن مجموع لا نهاية من الحدود هو

$$\frac{ب}{١ - ر}$$

المشتقات إن مشتق ع = تا (س) هو

$$ع' = \lim_{هـ \to ٠} \frac{تا\,(س + هـ) - تا\,(س)}{هـ}$$

ويمثّل المشتق ظل الزاوية التي يصنعها المماس للمنحني مع محور السينات .

قواعد المشتقات

ليكن ص ، ف تابعين لـ x فإن مشتق :

$ع = ص\,ف$ هو $ع' = ص'\,ف + ص\,ف'$

$ع = \frac{ص}{ف}$ ، $ع' = \frac{ص'\,ف - ف'\,ص}{ف^{٢}}$

$ع = \sqrt{ص}$ ، $ع' = \frac{ص'}{٢\sqrt{ص}}$

$ع = ص^{ن}$ ، $ع' = ن\,ص^{ن-١}\,ص'$

$ع = جب\,ص$ ، $ع' = ص'\,تجب\,ص$

$ع = تجب\,ص$ ، $ع' = -\,ص'\,جب\,ص$

$ع = ظل\,ص$ ، $ع' = ص'\,(١ + ظل^{٢}\,ص)$

$ع = e^{ص}$ ، $ع' = ص'\,e^{ص}$

$ع = لع\,ص$ ، $ع' = \frac{ص'}{ص}$

$ع = ب^{ص}$ ، $ع' = ص'\,ب^{ص}\,لع\,ب$

$ع = ب$ ، $ع' = ٠$

ملاحظة إذا كانت ص = س في كل ما سبق فإننا نضع $ص' = ١$.

التفاضل إن تفاضل التابع ع = تا (س) هو بالتعريف

تفا ع = تا′ (س) تفا س

فإذا كان ع = تا (ص) فإننا نكتب أيضاً

تفا ع = تا′ (ص) تفا ص

التكامل غير المحدد لتابع تا (س) هو ذلك التابع

ع~ = لا (س)

الذي تفاضله يساوي تا (س) تفا س أي

تفا ع~ = تا (س) تفا س

ونعبر عن ع~ بالرمز

ع~ = ∫ تا (س) تفا س

الخاصتان الرئيسيتان للتكامل

∫ ا تا (س) تفا س = ا ∫ تا (س) تفا س

∫ [تا (س) + ها (س)] تفا س = ∫ تا (س) تفا س +

+ ∫ ها (س) تفا س

التكامل المحدد لتابع تا (س) هو

∫ من ا إلى ب تا (س) تفا س = [لا (س)] من ا إلى ب = لا (ب) - لا (ا)

خواص التكامل المحدد :

$\int_{\text{أ}}^{\text{أ}}$ نا (س) تفا س = ٠ ،

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ نا(س) تفا س = − $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}}$ نا (س) تفا س

بفرض أ < حـ < ب فإن

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ نا (س) تفا س = $\int_{\text{أ}}^{\text{حـ}}$ نا(س) تفا س + $\int_{\text{حـ}}^{\text{ب}}$ نا (س) تفا س

ملاحظة

يمثل التكامل المحدد $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ نا (س) تفا س مساحة المنطقة الواقعة بين المنحني ع = نا (س) والمستقيمين س = أ و س = ب ومحور السينات .

المساحة بين منحنيين ع = تا (س) و ع = ها (س) وبين المستقيمين س = أ و س = ب هي

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ [ها (س) − نا (س)] تفا س

وذلك بشرط أن يكون ها (س) $\leqq$ تا (س) في المجال [أ ، ب] .

7. المثلثات

تعريف أساسي

النسبة المثلثية هي عدد مرتبط بزاوية ه في المثلث القائم . ويرتبط بالزاوية ه عدد من النسب المثلثية :

حب ه = المقابل / الوتر

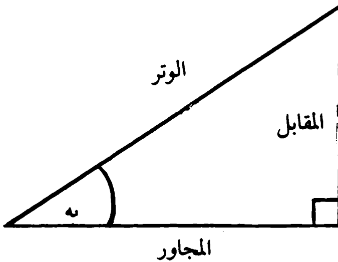
نحب ه = المجاور / الوتر

طل ه = المقابل / المجاور

ها ه = الوتر / المجاور

نطل ه = المجاور / المقابل

قا ه = الوتر / المقابل



العلاقات بين النسب المثلثية

حٮ^{٢} هـ + ٮحٮ^{٢} هـ = ١

طل هـ = $\dfrac{\text{حٮ هـ}}{\text{ٮحٮ هـ}}$

١ + طل^{٢} هـ = $\dfrac{١}{\text{ٮحٮ}^{٢}\text{ هـ}}$

١ + ٮطل^{٢} هـ = $\dfrac{١}{\text{حٮ}^{٢}\text{ هـ}}$

ٮطل هـ = $\dfrac{١}{\text{طل هـ}}$

إشارات النسب المثلثية

الربع / النسبة	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
حٮ هـ	+	+	−	−
ٮحٮ هـ	+	−	−	+
طل هـ	+	−	+	−
ٮطل هـ	+	−	+	−

القيم المضبوطة للنسب المثلثية

الزاوية بالدرجات	الزاوية بالراديان	جا هـ	جتا هـ	ظل هـ
٠	٠	٠	١	٠
١٥	$\frac{\pi}{١٢}$	$\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}-\sqrt{٢})$	$\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}+\sqrt{٢})$	$٢-\sqrt{٣}$
٣٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$
٤٥	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	١
٦٠	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
٧٥	$\frac{٥\pi}{١٢}$	$\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}+\sqrt{٢})$	$\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}-\sqrt{٢})$	$٢+\sqrt{٣}$
٩٠	$\frac{\pi}{٢}$	١	٠	غير مُعرّف

الارجاع إلى الربع الأول

	− ه	$\frac{\pi}{2}$ ± ه	π ± ه	$\frac{3\pi}{2}$ ± ه	2π ك ± ه ك عدد صحيح
حب	− حب ه	تحب ه	∓ حب ه	− تحب ه	± حب ه
تحب	تحب ه	∓ حب ه	− تحب ه	± حب ه	تحب ه
طل	− طل ه	∓ تطل ه	± طل ه	∓ تطل ه	± طل ه

ملاحظة نأخذ الإشارة العليا مع العليا والسفلى مع السفلى .

حساب نسبة مثلثية من نسبة أخرى

نأخذ الإشارة المناسبة للربع الذي تقع فيه ه .

النسبة / بدلالة	حب	تحب	طل
حب ه	—	$\pm \sqrt{1 - \text{تحب}^2 \text{ه}}$	$\pm \frac{\text{طل ه}}{\sqrt{1 + \text{طل}^2 \text{ه}}}$
تحب ه	$\pm \sqrt{1 - \text{حب}^2 \text{ه}}$	—	$\frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \text{طل}^2 \text{ه}}}$
طل ه	$\pm \frac{\text{حب ه}}{\sqrt{1 - \text{حب}^2 \text{ه}}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \text{تحب}^2 \text{ه}}}{\text{تحب ه}}$	—

النسب المثلثية لمجموع وفرق زاويتين

$$\text{جب}(\text{ب} \pm \text{جـ}) = \text{جب ب تجب جـ} \pm \text{تجب ب جب جـ}$$

$$\text{تجب}(\text{ب} \pm \text{جـ}) = \text{تجب ب تجب جـ} \mp \text{جب ب جب جـ}$$

$$\text{ظل}(\text{ب} \pm \text{جـ}) = \frac{\text{ظل ب} \pm \text{ظل جـ}}{1 \mp \text{ظل ب ظل جـ}}$$

$$\text{جب}(\text{ب} + \text{جـ})\ \text{جب}(\text{ب} - \text{جـ}) = \text{تجب}^2\text{جـ} - \text{تجب}^2\text{ب}$$

$$\text{تجب}(\text{ب} + \text{جـ})\ \text{تجب}(\text{ب} - \text{جـ}) = \text{جب}^2\text{جـ} - \text{جب}^2\text{ب}$$

مجموع وفرق النسب المثلثية

$$\text{جب ب} + \text{جب جـ} = 2\ \text{جب}\ \frac{\text{ب} + \text{جـ}}{2}\ \text{تجب}\ \frac{\text{ب} - \text{جـ}}{2}$$

$$\text{جب ب} - \text{جب جـ} = 2\ \text{تجب}\ \frac{\text{ب} + \text{جـ}}{2}\ \text{جب}\ \frac{\text{ب} - \text{جـ}}{2}$$

$$\text{تجب ب} + \text{تجب جـ} = 2\ \text{تجب}\ \frac{\text{ب} + \text{جـ}}{2}\ \text{تجب}\ \frac{\text{ب} - \text{جـ}}{2}$$

$$\text{تجب ب} - \text{تجب جـ} = -2\ \text{جب}\ \frac{\text{ب} + \text{جـ}}{2}\ \text{جب}\ \frac{\text{ب} - \text{جـ}}{2}$$

جداء النسب المثلثية

$$\text{جب ب جب جـ} = \frac{1}{2}[\text{تجب}(\text{ب} - \text{جـ}) - \text{تجب}(\text{ب} + \text{جـ})]$$

$$\text{تجب ب تجب جـ} = \frac{1}{2}[\text{تجب}(\text{ب} - \text{جـ}) + \text{تجب}(\text{ب} + \text{جـ})]$$

$$\text{حب ب نحب حـ} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left[\text{حب (ب + حـ) + حب (ب − حـ)}\right]$$

$$\text{نحب ب حب حـ} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left[\text{(حب (ب + حـ) − حب (ب − حـ)}\right]$$

النسب المثلثية لزاوية بدلالة نصفها

$$\text{حب ٢ ه} = \text{٢ حب ه نحب ه}$$

$$\text{نحب ٢ ه} = \text{نحب}^{\text{٢}}\text{ ه} - \text{حب}^{\text{٢}}\text{ ه} = \text{١} - \text{٢ حب}^{\text{٢}}\text{ ه} = \text{٢ نحب}^{\text{٢}}\text{ ه} - \text{١}$$

$$\text{طل ٢ ه} = \frac{\text{٢ طل ه}}{\text{١} - \text{طل}^{\text{٢}}\text{ ه}}$$

النسب المثلثية لزاوية بدلالة ضعفها

$$\text{حب}^{\text{٢}}\text{ ه} = \frac{\text{١ − نحب ٢ ه}}{\text{٢}} \qquad \text{نحب}^{\text{٢}}\text{ ه} = \frac{\text{١ + نحب ٢ ه}}{\text{٢}}$$

$$\text{طل}^{\text{٢}}\text{ ه} = \frac{\text{١ − نحب ٢ ه}}{\text{١ + نحب ٢ ه}}$$

صيغ مضاعفات الزاوية

$$\text{حب ٣ ب} = \text{٣ حب ب} - \text{٤ حب}^{\text{٣}}\text{ ب}$$

$$\text{نحب ٣ ب} = \text{٤ نحب}^{\text{٣}}\text{ ب} - \text{٣ نحب ب}$$

$$\text{طل ٣ ب} = \frac{\text{٣ طل ب} - \text{طل}^{\text{٣}}\text{ ب}}{\text{١} - \text{٣ طل}^{\text{٢}}\text{ ب}}$$

حا ٤ ب = ٤ حا ب حتا ب − ٨ حا^{٣} ب حتا ب

حتا ٤ ب = ٨ حتا^{٤} ب − ٨ حتا^{٢} ب + ١

قوى النسب المثلثية

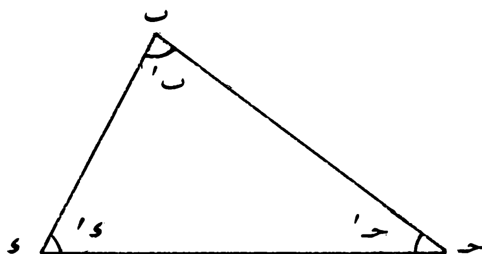
حا^{٣} ب = $\frac{١}{٤}$ (٣ حا ب − حا ٣ ب)

حتا^{٣} ب = $\frac{١}{٤}$ (٣ حتا ب + حتا ٣ ب)

حا^{٤} ب = $\frac{١}{٨}$ (حتا ٤ ب − ٤ حتا ٢ ب + ٣)

حتا^{٤} ب = $\frac{١}{٨}$ (حتا ٤ ب + ٤ حتا ٢ ب + ٣)

العلاقات بين أضلاع مثلث وزواياه



علاقة الجيوب

$\frac{\text{ب}'}{\text{حا ب}}$ = $\frac{\text{حـ}'}{\text{حا حـ}}$ = $\frac{\text{ء}'}{\text{حا ء}}$ = ٢ ر

حيث ر نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث .

علاقة جيب التمام

$$\text{تجب } ى = \frac{ب'^{2} + حـ'^{2} - ى'^{2}}{٢\ ب'\ حـ'}$$

يمكن كتابة علاقات مشابهة من أجل الزاويتين ب ، حـ .

قانون المماسات

$$\frac{ب' + حـ'}{ب' - حـ'} = \frac{\text{ظل } \frac{(ب + حـ)}{٢}}{\text{ظل } \frac{(ب - حـ)}{٢}}$$

$$\text{جب } ب = \frac{٢}{حـ'\ ى'} \sqrt{ط\ (ط - ب')\ (ط - حـ')\ (ط - ى')}$$

ط : نصف محيط المثلث .

وبالمثل نكتب علاقات مشابهة من أجل باقي الزوايا .

الجدول 1. أمثال ثنائي الحد

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

الاحتمالات

ليكن p احتمال وقوع حادث E عند اجراء تجربة واحدة و $q = 1 - p$ احتمال عدم وقوعه . فإن احتمال وقوع E عدداً r من المرات عند إجراء n تجربة هو

$$\binom{n}{r} p^r q^{n-r}.$$

أما احتمال وقوع E على الأقل r مرّة عند اجراء n تجربة فهو

$$\sum_{i=r}^{i=n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

كما أن احتمال وقوع E على الأكثر r مرة عند اجراء n تجربة هو

$$\sum_{i=0}^{i=r} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}.$$

أن $\overline{x}$ متوسط عدد الحوادث المواتية في التوزيع الثنائي (برنولي) هو np ، كما أن متوسط عدد الحوادث غير المواتية هو nq. أما الانحراف المعياري فهو
$\sigma = \sqrt{pqn}$

إذا كان y يخضع للتوزيع الطبيعي (غوص) فإن احتمال وقوع y بين y_1 و y_2 هو

$$P = \int_{y_1}^{y_2} p(y)\, dy$$

حيث

$$p(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y-a)^2/2\sigma^2}$$

و a متوسط التوزيع ، σ الانحراف المعياري للتوزيع .
إذا كان $x = (y - a) / \sigma$ فإن

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \Phi(x)\, dx,$$

حيث

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

هو التابع الطبيعي و x_i هي قيمة x عندما $y = y_i$.

الجدول 2. التوزيع الطبيعي (النظامي)

x	$\frac{1}{2}(1+\alpha)$	$\Phi(x)$	$\Phi^{(2)}(x)$	$\Phi^{(3)}(x)$	$\Phi^{(4)}(x)$	x	$\frac{1}{2}(1+\alpha)$	$\Phi(x)$	$\Phi^{(2)}(x)$	$\Phi^{(3)}(x)$	$\Phi^{(4)}(x)$
0.00	.5000	.3989	−.3989	.0000	1.1968	0.50	.6915	.3521	−.2641	.4841	.5501
0.01	.5040	.3989	−.3989	.0120	1.1965	0.51	.6950	.3503	−.2592	.4895	.5279
0.02	.5080	.3989	−.3987	.0239	1.1956	0.52	.6985	.3485	−.2543	.4947	.5056
0.03	.5120	.3988	−.3984	.0359	1.1941	0.53	.7019	.3467	−.2493	.4996	.4831
0.04	.5160	.3986	−.3980	.0478	1.1920	0.54	.7054	.3448	−.2443	.5043	.4605
0.05	.5199	.3984	−.3975	.0597	1.1894	0.55	.7088	.3429	−.2392	.5088	.4378
0.06	.5239	.3982	−.3968	.0716	1.1861	0.56	.7123	.3410	−.2341	.5131	.4150
0.07	.5279	.3980	−.3960	.0834	1.1822	0.57	.7157	.3391	−.2289	.5171	.3921
0.08	.5319	.3977	−.3951	.0952	1.1778	0.58	.7190	.3372	−.2238	.5209	.3691
0.09	.5359	.3973	−.3941	.1070	1.1727	0.59	.7224	.3352	−.2185	.5245	.3461
0.10	.5398	.3970	−.3930	.1187	1.1671	0.60	.7257	.3332	−.2133	.5278	.3231
0.11	.5438	.3965	−.3917	.1303	1.1609	0.61	.7291	.3312	−.2080	.5309	.3000
0.12	.5478	.3961	−.3904	.1419	1.1541	0.62	.7324	.3292	−.2027	.5338	.2770
0.13	.5517	.3956	−.3889	.1534	1.1468	0.63	.7357	.3271	−.1973	.5365	.2539
0.14	.5557	.3951	−.3873	.1648	1.1389	0.64	.7389	.3251	−.1919	.5389	.2309
0.15	.5596	.3945	−.3856	.1762	1.1304	0.65	.7422	.3230	−.1865	.5411	.2078
0.16	.5636	.3939	−.3838	.1874	1.1214	0.66	.7454	.3209	−.1811	.5431	.1849
0.17	.5675	.3932	−.3819	.1986	1.1118	0.67	.7486	.3187	−.1757	.5448	.1620
0.18	.5714	.3925	−.3798	.2097	1.1017	0.68	.7517	.3166	−.1702	.5463	.1391
0.19	.5753	.3918	−.3777	.2206	1.0911	0.69	.7549	.3144	−.1647	.5476	.1164
0.20	.5793	.3910	−.3754	.2315	1.0799	0.70	.7580	.3123	−.1593	.5486	.0937
0.21	.5832	.3902	−.3730	.2422	1.0682	0.71	.7611	.3101	−.1538	.5495	.0712
0.22	.5871	.3894	−.3706	.2529	1.0560	0.72	.7642	.3079	−.1483	.5501	.0487
0.23	.5910	.3885	−.3680	.2634	1.0434	0.73	.7673	.3056	−.1428	.5504	.0265
0.24	.5948	.3876	−.3653	.2737	1.0302	0.74	.7704	.3034	−.1373	.5506	.0043
0.25	.5987	.3867	−.3625	.2840	1.0165	0.75	.7734	.3011	−.1318	.5505	−.0176
0.26	.6026	.3857	−.3596	.2941	1.0024	0.76	.7764	.2989	−.1262	.5502	−.0394
0.27	.6064	.3847	−.3566	.3040	0.9878	0.77	.7794	.2966	−.1207	.5497	−.0611
0.28	.6103	.3836	−.3535	.3138	0.9727	0.78	.7823	.2943	−.1153	.5490	−.0825
0.29	.6141	.3825	−.3504	.3235	0.9572	0.79	.7852	.2920	−.1098	.5481	−.1037
0.30	.6179	.3814	−.3471	.3330	0.9413	0.80	.7881	.2897	−.1043	.5469	−.1247
0.31	.6217	.3802	−.3437	.3423	0.9250	0.81	.7910	.2874	−.0988	.5456	−.1455
0.32	.6255	.3790	−.3402	.3515	0.9082	0.82	.7939	.2850	−.0934	.5440	−.1660
0.33	.6293	.3778	−.3367	.3605	0.8910	0.83	.7967	.2827	−.0880	.5423	−.1862
0.34	.6331	.3765	−.3330	.3693	0.8735	0.84	.7995	.2803	−.0825	.5403	−.2063
0.35	.6368	.3752	−.3293	.3779	0.8556	0.85	.8023	.2780	−.0771	.5381	−.2260
0.36	.6406	.3739	−.3255	.3864	0.8373	0.86	.8051	.2756	−.0718	.5358	−.2455
0.37	.6443	.3725	−.3216	.3947	0.8186	0.87	.8078	.2732	−.0664	.5332	−.2646
0.38	.6480	.3712	−.3176	.4028	0.7996	0.88	.8106	.2709	−.0611	.5305	−.2835
0.39	.6517	.3697	−.3135	.4107	0.7803	0.89	.8133	.2685	−.0558	.5276	−.3021
0.40	.6554	.3683	−.3094	.4184	0.7607	0.90	.8159	.2661	−.0506	.5245	−.3203
0.41	.6591	.3668	−.3059	.4259	0.7408	0.91	.8186	.2637	−.0453	.5212	−.3383
0.42	.6628	.3653	−.3008	.4332	0.7206	0.92	.8212	.2613	−.0401	.5177	−.3559
0.43	.6664	.3637	−.2965	.4403	0.7001	0.93	.8238	.2589	−.0350	.5140	−.3731
0.44	.6700	.3621	−.2920	.4472	0.6793	0.94	.8264	.2565	−.0299	.5102	−.3901
0.45	.6736	.3605	−.2875	.4539	0.6583	0.95	.8289	.2541	−.0248	.5062	−.4066
0.46	.6772	.3589	−.2830	.4603	0.6371	0.96	.8315	.2516	−.0197	.5021	−.4228
0.47	.6808	.3572	−.2783	.4666	0.6156	0.97	.8340	.2492	−.0147	.4978	−.4387
0.48	.6844	.3555	−.2736	.4727	0.5940	0.98	.8365	.2468	−.0098	.4933	−.4541
0.49	.6879	.3538	−.2689	.4785	0.5721	0.99	.8389	.2444	−.0049	.4887	−.4692

المساحة تحت $\Phi(x)$ من $-\infty$ إلى x = $\frac{1}{2}(1+\alpha) = \int_{-\infty}^{x} \Phi(x)\,dx$

التابع الطبيعي = $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ $\qquad \alpha = \int_{-x}^{x} \Phi(x)\,dx$

المشتق الثاني لـ $\Phi(x)$ = $\Phi^{(2)}(x) = (x^2 - 1)\,\Phi(x)$

المشتق الثالث لـ $\Phi(x)$ = $\Phi^{(3)}(x) = (3x - x^3)\,\Phi(x)$

المشتق الرابع لـ $\Phi(x)$ = $\Phi^{(4)}(x) = (x^4 - 6x^2 + 3)\,\Phi(x)$

تتمة الجدول 2

x	$\frac{1}{2}(1+\alpha)$	$\Phi(x)$	$\Phi^{(2)}(x)$	$\Phi^{(3)}(x)$	$\Phi^{(4)}(x)$	x	$\frac{1}{2}(1+\alpha)$	$\Phi(x)$	$\Phi^{(2)}(x)$	$\Phi^{(3)}(x)$	$\Phi^{(4)}(x)$
1.00	.8413	.2420	.0000	.4839	−.4839	1.50	.9332	.1295	.1619	.1457	−.7043
1.01	.8438	.2396	.0048	.4790	−.4983	1.51	.9345	.1276	.1633	.1387	−.6994
1.02	.8461	.2371	.0096	.4740	−.5122	1.52	.9357	.1257	.1647	.1317	−.6942
1.03	.8485	.2347	.0143	.4688	−.5257	1.53	.9370	.1238	.1660	.1248	−.6888
1.04	.8508	.2323	.0190	.4635	−.5389	1.54	.9382	.1219	.1672	.1180	−.6831
1.05	.8531	.2299	.0236	.4580	−.5516	1.55	.9394	.1200	.1683	.1111	−.6772
1.06	.8554	.2275	.0281	.4524	−.5639	1.56	.9406	.1182	.1694	.1044	−.6710
1.07	.8577	.2251	.0326	.4467	−.5758	1.57	.9418	.1163	.1704	.0977	−.6646
1.08	.8599	.2227	.0371	.4409	−.5873	1.58	.9429	.1145	.1714	.0911	−.6580
1.09	.8621	.2203	.0414	.4350	−.5984	1.59	.9441	.1127	.1722	.0846	−.6511
1.10	.8643	.2179	.0458	.4290	−.6091	1.60	.9452	.1109	.1730	.0781	−.6441
1.11	.8665	.2155	.0500	.4228	−.6193	1.61	.9463	.1092	.1738	.0717	−.6368
1.12	.8686	.2131	.0542	.4166	−.6292	1.62	.9474	.1074	.1745	.0654	−.6293
1.13	.8708	.2107	.0583	.4102	−.6386	1.63	.9484	.1057	.1751	.0591	−.6216
1.14	.8729	.2083	.0624	.4038	−.6476	1.64	.9495	.1040	.1757	.0529	−.6138
1.15	.8749	.2059	.0664	.3973	−.6561	1.65	.9505	.1023	.1762	.0468	−.6057
1.16	.8770	.2036	.0704	.3907	−.6643	1.66	.9515	.1006	.1766	.0408	−.5975
1.17	.8790	.2012	.0742	.3840	−.6720	1.67	.9525	.0989	.1770	.0349	−.5891
1.18	.8810	.1989	.0780	.3772	−.6792	1.68	.9535	.0973	.1773	.0290	−.5806
1.19	.8830	.1965	.0818	.3704	−.6861	1.69	.9545	.0957	.1776	.0233	−.5720
1.20	.8849	.1942	.0854	.3635	−.6926	1.70	.9554	.0940	.1778	.0176	−.5632
1.21	.8869	.1919	.0890	.3566	−.6986	1.71	.9564	.0925	.1779	.0120	−.5542
1.22	.8888	.1895	.0926	.3496	−.7042	1.72	.9573	.0909	.1780	.0065	−.5452
1.23	.8907	.1872	.0960	.3425	−.7094	1.73	.9582	.0893	.1780	.0011	−.5360
1.24	.8925	.1849	.0994	.3354	−.7141	1.74	.9591	.0878	.1780	−.0042	−.5267
1.25	.8944	.1826	.1027	.3282	−.7185	1.75	.9599	.0863	.1780	−.0094	−.5173
1.26	.8962	.1804	.1060	.3210	−.7224	1.76	.9608	.0848	.1778	−.0146	−.5079
1.27	.8980	.1781	.1092	.3138	−.7259	1.77	.9616	.0833	.1777	−.0196	−.4983
1.28	.8997	.1758	.1123	.3065	−.7291	1.78	.9625	.0818	.1774	−.0245	−.4887
1.29	.9015	.1736	.1153	.2992	−.7318	1.79	.9633	.0804	.1772	−.0294	−.4789
1.30	.9032	.1714	.1182	.2918	−.7341	1.80	.9641	.0790	.1769	−.0341	−.4692
1.31	.9049	.1691	.1211	.2845	−.7361	1.81	.9649	.0775	.1765	−.0388	−.4593
1.32	.9066	.1669	.1239	.2771	−.7376	1.82	.9656	.0761	.1761	−.0433	−.4494
1.33	.9082	.1647	.1267	.2697	−.7388	1.83	.9664	.0748	.1756	−.0477	−.4395
1.34	.9099	.1626	.1293	.2624	−.7395	1.84	.9671	.0734	.1751	−.0521	−.4295
1.35	.9115	.1604	.1319	.2550	−.7399	1.85	.9678	.0721	.1746	−.0563	−.4195
1.36	.9131	.1582	.1344	.2476	−.7400	1.86	.9686	.0707	.1740	−.0605	−.4095
1.37	.9147	.1561	.1369	.2402	−.7396	1.87	.9693	.0694	.1734	−.0645	−.3995
1.38	.9162	.1539	.1392	.2328	−.7389	1.88	.9699	.0681	.1727	−.0685	−.3894
1.39	.9177	.1518	.1415	.2254	−.7378	1.89	.9706	.0669	.1720	−.0723	−.3793
1.40	.9192	.1497	.1437	.2180	−.7364	1.90	.9713	.0656	.1713	−.0761	−.3693
1.41	.9207	.1476	.1459	.2107	−.7347	1.91	.9719	.0644	.1705	−.0797	−.3592
1.42	.9222	.1456	.1480	.2033	−.7326	1.92	.9726	.0632	.1697	−.0832	−.3492
1.43	.9236	.1435	.1500	.1960	−.7301	1.93	.9732	.0620	.1688	−.0867	−.3392
1.44	.9251	.1415	.1519	.1887	−.7274	1.94	.9738	.0608	.1679	−.0900	−.3292
1.45	.9265	.1394	.1537	.1815	−.7243	1.95	.9744	.0596	.1670	−.0933	−.3192
1.46	.9279	.1374	.1555	.1742	−.7209	1.96	.9750	.0584	.1661	−.0964	−.3093
1.47	.9292	.1354	.1572	.1670	−.7172	1.97	.9756	.0573	.1651	−.0994	−.2994
1.48	.9306	.1334	.1588	.1599	−.7132	1.98	.9761	.0562	.1641	−.1024	−.2895
1.49	.9319	.1315	.1604	.1528	−.7089	1.99	.9767	.0551	.1630	−.1052	−.2797

ملاحظة . إذا كانت n كبيرة فإن القيمة التقريبية للمقدار $(p+q)^n \equiv \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} p^{n-t} q^t,\ p+q=1,$ تُعطى بالعلاقة

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x)\,dx + \left[\frac{q-p}{6\sigma}\Phi^{(2)}(x) + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{6}{n}\right)\Phi^{(3)}(x)\right]_{x_1}^{x_2}$$

حيث $x_1 = (a - \frac{1}{2} - nq)/\sigma,\ x_2 = (b + \frac{1}{2} - nq)/\sigma,\ \sigma = \sqrt{npq}.$

x	$\frac{1}{2}(1+\alpha)$	$\Phi(x)$	$\Phi^{(2)}(x)$	$\Phi^{(3)}(x)$	$\Phi^{(4)}(x)$	x	$\frac{1}{2}(1+\alpha)$	$\Phi(x)$	$\Phi^{(2)}(x)$	$\Phi^{(3)}(x)$	$\Phi^{(4)}(x)$
2.00	.9772	.0540	.1620	−.1080	−.2700	2.50	.9938	.0175	.0920	−.1424	.0800
2.01	.9778	.0529	.1609	−.1106	−.2603	2.51	.9940	.0171	.0906	−.1416	.0836
2.02	.9783	.0519	.1598	−.1132	−.2506	2.52	.9941	.0167	.0892	−.1408	.0871
2.03	.9788	.0508	.1586	−.1157	−.2411	2.53	.9943	.0163	.0878	−.1399	.0905
2.04	.9793	.0498	.1575	−.1180	−.2316	2.54	.9945	.0158	.0864	−.1389	.0937
2.05	.9798	.0488	.1563	−.1203	−.2222	2.55	.9946	.0154	.0850	−.1380	.0968
2.06	.9803	.0478	.1550	−.1225	−.2129	2.56	.9948	.0151	.0836	−.1370	.0998
2.07	.9808	.0468	.1538	−.1245	−.2036	2.57	.9949	.0147	.0823	−.1360	.1027
2.08	.9812	.0459	.1526	−.1265	−.1945	2.58	.9951	.0143	.0809	−.1350	.1054
2.09	.9817	.0449	.1513	−.1284	−.1854	2.59	.9952	.0139	.0796	−.1339	.1080
2.10	.9821	.0440	.1500	−.1302	−.1765	2.60	.9953	.0136	.0782	−.1328	.1105
2.11	.9826	.0431	.1487	−.1320	−.1676	2.61	.9955	.0132	.0769	−.1317	.1129
2.12	.9830	.0422	.1474	−.1336	−.1588	2.62	.9956	.0129	.0756	−.1305	.1152
2.13	.9834	.0413	.1460	−.1351	−.1502	2.63	.9957	.0126	.0743	−.1294	.1173
2.14	.9838	.0404	.1446	−.1366	−.1416	2.64	.9959	.0122	.0730	−.1282	.1194
2.15	.9842	.0395	.1433	−.1380	−.1332	2.65	.9960	.0119	.0717	−.1270	.1213
2.16	.9846	.0387	.1419	−.1393	−.1249	2.66	.9961	.0116	.0705	−.1258	.1231
2.17	.9850	.0379	.1405	−.1405	−.1167	2.67	.9962	.0113	.0692	−.1245	.1248
2.18	.9854	.0371	.1391	−.1416	−.1086	2.68	.9963	.0110	.0680	−.1233	.1264
2.19	.9857	.0363	.1377	−.1426	−.1006	2.69	.9964	.0107	.0668	−.1220	.1279
2.20	.9861	.0355	.1362	−.1436	−.0927	2.70	.9965	.0104	.0656	−.1207	.1293
2.21	.9864	.0347	.1348	−.1445	−.0850	2.71	.9966	.0101	.0644	−.1194	.1306
2.22	.9868	.0339	.1333	−.1453	−.0774	2.72	.9967	.0099	.0632	−.1181	.1317
2.23	.9871	.0332	.1319	−.1460	−.0700	2.73	.9968	.0096	.0620	−.1168	.1328
2.24	.9875	.0325	.1304	−.1467	−.0626	2.74	.9969	.0093	.0608	−.1154	.1338
2.25	.9878	.0317	.1289	−.1473	−.0554	2.75	.9970	.0091	.0597	−.1141	.1347
2.26	.9881	.0310	.1275	−.1478	−.0484	2.76	.9971	.0088	.0585	−.1127	.1356
2.27	.9884	.0303	.1260	−.1483	−.0414	2.77	.9972	.0086	.0574	−.1114	.1363
2.28	.9887	.0297	.1245	−.1486	−.0346	2.78	.9973	.0084	.0563	−.1100	.1369
2.29	.9890	.0290	.1230	−.1490	−.0279	2.79	.9974	.0081	.0552	−.1087	.1375
2.30	.9893	.0283	.1215	−.1492	−.0214	2.80	.9974	.0079	.0541	−.1073	.1379
2.31	.9896	.0277	.1200	−.1494	−.0150	2.81	.9975	.0077	.0531	−.1059	.1383
2.32	.9898	.0270	.1185	−.1495	−.0088	2.82	.9976	.0075	.0520	−.1045	.1386
2.33	.9901	.0264	.1170	−.1496	−.0027	2.83	.9977	.0073	.0510	−.1031	.1389
2.34	.9904	.0258	.1155	−.1496	.0033	2.84	.9977	.0071	.0500	−.1017	.1390
2.35	.9906	.0252	.1141	−.1495	.0092	2.85	.9978	.0069	.0490	−.1003	.1391
2.36	.9909	.0246	.1126	−.1494	.0149	2.86	.9979	.0067	.0480	−.0990	.1391
2.37	.9911	.0241	.1111	−.1492	.0204	2.87	.9979	.0065	.0470	−.0976	.1391
2.38	.9913	.0235	.1096	−.1490	.0258	2.88	.9980	.0063	.0460	−.0962	.1389
2.39	.9916	.0229	.1081	−.1487	.0311	2.89	.9981	.0061	.0451	−.0948	.1388
2.40	.9918	.0224	.1066	−.1483	.0362	2.90	.9981	.0060	.0441	−.0934	.1385
2.41	.9920	.0219	.1051	−.1480	.0412	2.91	.9982	.0058	.0432	−.0920	.1382
2.42	.9922	.0213	.1036	−.1475	.0461	2.92	.9982	.0056	.0423	−.0906	.1378
2.43	.9925	.0208	.1022	−.1470	.0508	2.93	.9983	.0055	.0414	−.0893	.1374
2.44	.9927	.0203	.1007	−.1465	.0554	2.94	.9984	.0053	.0405	−.0879	.1369
2.45	.9929	.0198	.0992	−.1459	.0598	2.95	.9984	.0051	.0396	−.0865	.1364
2.46	.9931	.0194	.0978	−.1453	.0641	2.96	.9985	.0050	.0388	−.0852	.1358
2.47	.9932	.0189	.0963	−.1446	.0683	2.97	.9985	.0048	.0379	−.0838	.1352
2.48	.9934	.0184	.0949	−.1439	.0723	2.98	.9986	.0047	.0371	−.0825	.1345
2.49	.9936	.0180	.0935	−.1432	.0762	2.99	.9986	.0046	.0363	−.0811	.1337

ملاحظة . يُعطى مجموع $t+1$ حداً الأولى لمفكوك

$$(p+q)^n \equiv \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} p^{n-t} q^t, \; p+q=1,$$

بصورة تقريبية بالعلاقة

$$\int_x^{\infty}\Phi(x)\,dx + \frac{q-p}{6\sigma}\,\Phi^{(2)}(x) - \frac{1}{24}\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{6}{n}\right)\Phi^{(3)}(x)$$

حيث

$$x = (s - \tfrac{1}{2} - np)/\sigma,\ s = n - t.$$

أما **مجموع** $s + 1$ حداً الأخيرة فيُعطى بصورة تقريبية بالعلاقة

$$\int_x^{\infty}\Phi(x)\,dx - \frac{q-p}{6\sigma}\,\Phi^{(2)}(x) - \frac{1}{24}\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{6}{n}\right)\Phi^{(3)}(x)$$

حيث

$$x = (t - \tfrac{1}{2} - nq)/\sigma,\ t = n - s,\ \sigma = \sqrt{npq}$$

تتمة الجدول 2

x	$\frac{1}{2}(1+\alpha)$	$\Phi(x)$	$\Phi^{(2)}(x)$	$\Phi^{(3)}(x)$	$\Phi^{(4)}(x)$	x	$\frac{1}{2}(1+\alpha)$	$\Phi(x)$	$\Phi^{(2)}(x)$	$\Phi^{(3)}(x)$	$\Phi^{(4)}(x)$
3.00	.9987	.0044	.0355	−.0798	.1330	3.50	.9998	.0009	.0098	−.0283	.0694
3.01	.9987	.0043	.0347	−.0785	.1321	3.51	.9998	.0008	.0095	−.0276	.0681
3.02	.9987	.0042	.0339	−.0771	.1313	3.52	.9998	.0008	.0093	−.0269	.0669
3.03	.9988	.0040	.0331	−.0758	.1304	3.53	.9998	.0008	.0090	−.0262	.0656
3.04	.9988	.0039	.0324	−.0745	.1294	3.54	.9998	.0008	.0087	−.0256	.0643
3.05	.9989	.0038	.0316	−.0732	.1285	3.55	.9998	.0007	.0085	−.0249	.0631
3.06	.9989	.0037	.0309	−.0720	.1275	3.56	.9998	.0007	.0082	−.0243	.0618
3.07	.9989	.0036	.0302	−.0707	.1264	3.57	.9998	.0007	.0080	−.0237	.0606
3.08	.9990	.0035	.0295	−.0694	.1254	3.58	.9998	.0007	.0078	−.0231	.0594
3.09	.9990	.0034	.0288	−.0682	.1243	3.59	.9998	.0006	.0075	−.0225	.0582
3.10	.9990	.0033	.0281	−.0669	.1231	3.60	.9998	.0006	.0073	−.0219	.0570
3.11	.9991	.0032	.0275	−.0657	.1220	3.61	.9998	.0006	.0071	−.0214	.0559
3.12	.9991	.0031	.0268	−.0645	.1208	3.62	.9999	.0006	.0069	−.0208	.0547
3.13	.9991	.0030	.0262	−.0633	.1196	3.63	.9999	.0005	.0067	−.0203	.0536
3.14	.9992	.0029	.0256	−.0621	.1184	3.64	.9999	.0005	.0065	−.0198	.0524
3.15	.9992	.0028	.0249	−.0609	.1171	3.65	.9999	.0005	.0063	−.0192	.0513
3.16	.9992	.0027	.0243	−.0598	.1159	3.66	.9999	.0005	.0061	−.0187	.0502
3.17	.9992	.0026	.0237	−.0586	.1146	3.67	.9999	.0005	.0059	−.0182	.0492
3.18	.9993	.0025	.0232	−.0575	.1133	3.68	.9999	.0005	.0057	−.0177	.0481
3.19	.9993	.0025	.0226	−.0564	.1120	3.69	.9999	.0004	.0056	−.0173	.0470
3.20	.9993	.0024	.0220	−.0552	.1107	3.70	.9999	.0004	.0054	−.0168	.0460
3.21	.9993	.0023	.0215	−.0541	.1093	3.71	.9999	.0004	.0052	−.0164	.0450
3.22	.9994	.0022	.0210	−.0531	.1080	3.72	.9999	.0004	.0051	−.0159	.0440
3.23	.9994	.0022	.0204	−.0520	.1066	3.73	.9999	.0004	.0049	−.0155	.0430
3.24	.9994	.0021	.0199	−.0509	.1053	3.74	.9999	.0004	.0048	−.0150	.0420
3.25	.9994	.0020	.0194	−.0499	.1039	3.75	.9999	.0004	.0046	−.0146	.0410
3.26	.9994	.0020	.0189	−.0488	.1025	3.76	.9999	.0003	.0045	−.0142	.0401
3.27	.9995	.0019	.0184	−.0478	.1011	3.77	.9999	.0003	.0043	−.0138	.0392
3.28	.9995	.0018	.0180	−.0468	.0997	3.78	.9999	.0003	.0042	−.0134	.0382
3.29	.9995	.0018	.0175	−.0458	.0983	3.79	.9999	.0003	.0041	−.0131	.0373
3.30	.9995	.0017	.0170	−.0449	.0969	3.80	.9999	.0003	.0039	−.0127	.0365
3.31	.9995	.0017	.0166	−.0439	.0955	3.81	.9999	.0003	.0038	−.0123	.0356
3.32	.9995	.0016	.0162	−.0429	.0941	3.82	.9999	.0003	.0037	−.0120	.0347
3.33	.9996	.0016	.0157	−.0420	.0927	3.83	.9999	.0003	.0036	−.0116	.0339
3.34	.9996	.0015	.0153	−.0411	.0913	3.84	.9999	.0003	.0034	−.0113	.0331
3.35	.9996	.0015	.0149	−.0402	.0899	3.85	.9999	.0002	.0033	−.0110	.0323
3.36	.9996	.0014	.0145	−.0393	.0885	3.86	.9999	.0002	.0032	−.0107	.0315
3.37	.9996	.0014	.0141	−.0384	.0871	3.87	.9999	.0002	.0031	−.0104	.0307
3.38	.9996	.0013	.0138	−.0376	.0857	3.88	.9999	.0002	.0030	−.0100	.0299
3.39	.9997	.0013	.0134	−.0367	.0843	3.89	.9999	.0002	.0029	−.0098	.0292
3.40	.9997	.0012	.0130	−.0359	.0829	3.90	1.0000	.0002	.0028	−.0095	.0284
3.41	.9997	.0012	.0127	−.0350	.0815	3.91	1.0000	.0002	.0027	−.0092	.0277
3.42	.9997	.0012	.0123	−.0342	.0801	3.92	1.0000	.0002	.0026	−.0089	.0270
3.43	.9997	.0011	.0120	−.0334	.0788	3.93	1.0000	.0002	.0026	−.0086	.0263
3.44	.9997	.0011	.0116	−.0327	.0774	3.94	1.0000	.0002	.0025	−.0084	.0256
3.45	.9997	.0010	.0113	−.0319	.0761	3.95	1.0000	.0002	.0024	−.0081	.0250
3.46	.9997	.0010	.0110	−.0311	.0747	3.96	1.0000	.0002	.0023	−.0079	.0243
3.47	.9997	.0010	.0107	−.0304	.0734	3.97	1.0000	.0002	.0022	−.0076	.0237
3.48	.9997	.0009	.0104	−.0297	.0721	3.98	1.0000	.0001	.0022	−.0074	.0230
3.49	.9998	.0009	.0101	−.0290	.0707	3.99	1.0000	.0001	.0021	−.0072	.0224

4.00	1.0000	.0001	.0020	−.0070	.0218	4.50	1.0000	.0000	.0003	−.0012	.0047
4.05	1.0000	.0001	.0017	−.0059	.0190	4.55	1.0000	.0000	.0003	−.0010	.0039
4.10	1.0000	.0001	.0014	−.0051	.0165	4.60	1.0000	.0000	.0002	−.0009	.0033
4.15	1.0000	.0001	.0012	−.0043	.0143	4.65	1.0000	.0000	.0002	−.0007	.0027
4.20	1.0000	.0001	.0010	−.0036	.0123	4.70	1.0000	.0000	.0001	−.0006	.0023
4.25	1.0000	.0000	.0008	−.0031	.0105	4.75	1.0000	.0000	.0001	−.0005	.0019
4.30	1.0000	.0000	.0007	−.0026	.0090	4.80	1.0000	.0000	.0001	−.0004	.0016
4.35	1.0000	.0000	.0006	−.0022	.0077	4.85	1.0000	.0000	.0001	−.0003	.0013
4.40	1.0000	.0000	.0005	−.0018	.0065	4.90	1.0000	.0000	.0001	−.0003	.0011
4.45	1.0000	.0000	.0004	−.0015	.0055	4.95	1.0000	.0000	.0000	−.0002	.0009

الجدول 3. توزيع بواسون المجمَّع

المُدْخلات في الجدول هي قيم $\sum_{x=x'}^{x=\infty} \frac{e^{-m}\, m^x}{x\,!}$ من أجل x' و m المبينتين .

x' \ m	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	.0952	.1813	.2592	.3297	.3935	.4512	.5034	.5507	.5934	.6321
2	.0047	.0175	.0369	.0616	.0902	.1219	.1558	.1912	.2275	.2642
3	.0002	.0011	.0036	.0079	.0144	.0231	.0341	.0474	.0629	.0803
4	.0000	.0001	.0003	.0008	.0018	.0034	.0058	.0091	.0135	.0190
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0008	.0014	.0023	.0037
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0006
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x' \ m	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	.6671	.6988	.7275	.7534	.7769	.7981	.8173	.8347	.8504	.8647
2	.3010	.3374	.3732	.4082	.4422	.4751	.5068	.5372	.5663	.5940
3	.0996	.1205	.1429	.1665	.1912	.2166	.2428	.2694	.2963	.3233
4	.0257	.0338	.0431	.0537	.0656	.0788	.0932	.1087	.1253	.1429
5	.0054	.0077	.0107	.0143	.0186	.0237	.0296	.0364	.0441	.0527
6	.0010	.0015	.0022	.0032	.0045	.0060	.0080	.0104	.0132	.0166
7	.0001	.0003	.0004	.0006	.0009	.0013	.0019	.0026	.0034	.0045
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004	.0006	.0008	.0011
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0002

x' \ m	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	.8775	.8892	.8997	.9093	.9179	.9257	.9328	.9392	.9450	.9502
2	.6204	.6454	.6691	.6916	.7127	.7326	.7513	.7689	.7854	.8009
3	.3504	.3773	.4040	.4303	.4562	.4816	.5064	.5305	.5540	.5768
4	.1614	.1806	.2007	.2213	.2424	.2640	.2859	.3081	.3304	.3528
5	.0621	.0725	.0838	.0959	.1088	.1226	.1371	.1523	.1682	.1847
6	.0204	.0249	.0300	.0357	.0420	.0490	.0567	.0651	.0742	.0839
7	.0059	.0075	.0094	.0116	.0142	.0172	.0206	.0244	.0287	.0335
8	.0015	.0020	.0026	.0033	.0042	.0053	.0066	.0081	.0099	.0119
9	.0003	.0005	.0006	.0009	.0011	.0015	.0019	.0024	.0031	.0038
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

x' \ m	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	.9550	.9592	.9631	.9666	.9698	.9727	.9753	.9776	.9798	.9817
2	.8153	.8288	.8414	.8532	.8641	.8743	.8838	.8926	.9008	.9084
3	.5988	.6201	.6406	.6603	.6792	.6973	.7146	.7311	.7469	.7619
4	.3752	.3975	.4197	.4416	.4634	.4848	.5058	.5265	.5468	.5665
5	.2018	.2194	.2374	.2558	.2746	.2936	.3128	.3322	.3516	.3712
6	.0943	.1054	.1171	.1295	.1424	.1559	.1699	.1844	.1994	.2149
7	.0388	.0446	.0510	.0579	.0653	.0733	.0818	.0909	.1005	.1107
8	.0142	.0168	.0198	.0231	.0267	.0308	.0352	.0401	.0454	.0511
9	.0047	.0057	.0069	.0083	.0099	.0117	.0137	.0160	.0185	.0214
10	.0014	.0018	.0022	.0027	.0033	.0040	.0048	.0058	.0069	.0081
11	.0004	.0005	.0006	.0008	.0010	.0013	.0016	.0019	.0023	.0028
12	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0009
13	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

تتمة الجدول 3

$$\sum_{x=x'}^{x=\infty} \frac{e^{-m}m^{x}}{x!}$$

x'	m = 4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	.9834	.9850	.9864	.9877	.9889	.9899	.9909	.9918	.9926	.9933
2	.9155	.9220	.9281	.9337	.9389	.9437	.9482	.9523	.9561	.9596
3	.7762	.7898	.8026	.8149	.8264	.8374	.8477	.8575	.8667	.8753
4	.5858	.6046	.6228	.6406	.6577	.6743	.6903	.7058	.7207	.7350
5	.3907	.4102	.4296	.4488	.4679	.4868	.5054	.5237	.5418	.5595
6	.2307	.2469	.2633	.2801	.2971	.3142	.3316	.3490	.3665	.3840
7	.1214	.1325	.1442	.1564	.1689	.1820	.1954	.2092	.2233	.2378
8	.0573	.0639	.0710	.0786	.0866	.0951	.1040	.1133	.1231	.1334
9	.0245	.0279	.0317	.0358	.0403	.0451	.0503	.0558	.0618	.0681
10	.0095	.0111	.0129	.0149	.0171	.0195	.0222	.0251	.0283	.0318
11	.0034	.0041	.0048	.0057	.0067	.0078	.0090	.0104	.0120	.0137
12	.0011	.0014	.0017	.0020	.0024	.0029	.0034	.0040	.0047	.0055
13	.0003	.0004	.0005	.0007	.0008	.0010	.0012	.0014	.0017	.0020
14	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007
15	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

x'	m = 5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	.9939	.9945	.9950	.9955	.9959	.9963	.9967	.9970	.9973	.9975
2	.9628	.9658	.9686	.9711	.9734	.9756	.9776	.9794	.9811	.9826
3	.8835	.8912	.8984	.9052	.9116	.9176	.9232	.9285	.9334	.9380
4	.7487	.7619	.7746	.7867	.7983	.8094	.8200	.8300	.8396	.8488
5	.5769	.5939	.6105	.6267	.6425	.6579	.6728	.6873	.7013	.7149
6	.4016	.4191	.4365	.4539	.4711	.4881	.5050	.5217	.5381	.5543
7	.2526	.2676	.2829	.2983	.3140	.3297	.3456	.3616	.3776	.3937
8	.1440	.1551	.1665	.1783	.1905	.2030	.2159	.2290	.2424	.2560
9	.0748	.0819	.0894	.0974	.1056	.1143	.1234	.1328	.1426	.1528
10	.0356	.0397	.0441	.0488	.0538	.0591	.0648	.0708	.0772	.0839
11	.0156	.0177	.0200	.0225	.0253	.0282	.0314	.0349	.0386	.0426
12	.0063	.0073	.0084	.0096	.0110	.0125	.0141	.0160	.0179	.0201
13	.0024	.0028	.0033	.0038	.0045	.0051	.0059	.0068	.0078	.0088
14	.0008	.0010	.0012	.0014	.0017	.0020	.0023	.0027	.0031	.0036
15	.0003	.0003	.0004	.0005	0006	.0007	.0009	.0010	.0012	.0014
16	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0004	.0004	.0005
17	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002
18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x'	m = 6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	.9978	.9980	.9982	.9983	.9985	.9986	.9988	.9989	.9990	.9991
2	.9841	.9854	.9866	.9877	.9887	.9897	.9905	.9913	.9920	.9927
3	.9423	.9464	.9502	.9537	.9570	.9600	.9629	.9656	.9680	.9704
4	.8575	.8658	.8736	8811	.8882	.8948	.9012	.9072	.9129	.9182
5	.7281	.7408	.7531	.7649	.7763	.7873	.7978	.8080	.8177	.8270
6	.5702	.5859	.6012	.6163	.6310	.6453	.6594	.6730	.6863	.6993
7	.4098	.4258	.4418	.4577	.4735	.4892	.5047	.5201	.5353	.5503
8	.2699	.2840	.2983	.3127	.3272	.3419	.3567	.3715	.3864	.4013
9	.1633	.1741	.1852	.1967	.2084	.2204	.2327	.2452	.2580	.2709
10	.0910	.0984	.1061	.1142	.1226	.1314	.1404	.1498	.1505	.1695
11	.0469	.0514	.0563	.0614	.0668	.0726	.0786	.0849	.0916	.0985
12	.0224	.0250	.0277	.0307	.0339	.0373	.0409	.0448	.0490	.0534
13	.0100	.0113	.0127	.0143	.0160	.0179	.0199	.0221	.0245	.0270
14	.0042	.0048	.0055	.0063	.0071	.0080	.0091	.0102	.0115	.0128
15	.0016	.0019	.0022	.0026	.0030	.0034	.0039	.0044	.0050	.0057
16	.0006	.0007	.0008	.0010	.0012	.0014	.0016	.0018	.0021	.0024
17	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0010
18	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004
19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

تتمة الجدول 3

$$\sum_{x=x'}^{x=\infty} \frac{e^{-m}m^{x}}{x!}$$

x'	m 7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	.9992	.9993	.9993	.9994	.9994	.9995	.9995	.9996	.9996	.9997
2	.9933	.9939	.9944	.9949	.9953	.9957	.9961	.9964	.9967	.9970
3	.9725	.9745	.9764	.9781	.9797	.9812	.9826	.9839	.9851	.9862
4	.9233	.9281	.9326	.9368	.9409	.9446	.9482	.9515	.9547	.9576
5	.8359	.8445	.8527	.8605	.8679	.8751	.8819	.8883	.8945	.9004
6	.7119	.7241	.7360	.7474	.7586	.7693	.7797	.7897	.7994	.8088
7	.5651	.5796	.5940	.6080	.6218	.6354	.6486	.6616	.6743	.6866
8	.4162	.4311	.4459	.4607	.4754	.4900	.5044	.5188	.5330	.5470
9	.2840	.2973	.3108	.3243	.3380	.3518	.3657	.3796	.3935	.4075
10	.1798	.1904	.2012	.2123	.2236	.2351	.2469	.2589	.2710	.2834
11	.1058	.1133	.1212	.1293	.1378	.1465	.1555	.1648	.1743	.1841
12	.0580	.0629	.0681	.0735	.0792	.0852	.0915	.0980	.1048	.1119
13	.0297	.0327	.0358	.0391	.0427	.0464	.0504	.0546	.0591	.0638
14	.0143	.0159	.0176	.0195	.0216	.0238	.0261	.0286	.0313	.0342
15	.0065	.0073	.0082	.0092	.0103	.0114	.0127	.0141	.0156	.0173
16	.0028	.0031	.0036	.0041	.0046	.0052	.0059	.0066	.0074	.0082
17	.0011	.0013	.0015	.0017	.0020	.0022	.0026	.0029	.0033	.0037
18	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0012	.0014	.0016
19	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006
20	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003
21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001

x'	m 8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	.9997	.9997	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9999	.9999
2	.9972	.9975	.9977	.9979	.9981	.9982	.9984	.9985	.9987	.9988
3	.9873	.9882	.9891	.9900	.9907	.9914	.9921	.9927	.9932	.9938
4	.9604	.9630	.9654	.9677	.9699	.9719	.9738	.9756	.9772	.9788
5	.9060	.9113	.9163	.9211	.9256	.9299	.9340	.9379	.9416	.9450
6	.8178	.8264	.8347	.8427	.8504	.8578	.8648	.8716	.8781	.8843
7	.6987	.7104	.7219	.7330	.7438	.7543	.7645	.7744	.7840	.7932
8	.5609	.5746	.5881	.6013	.6144	.6272	.6398	.6522	.6643	.6761
9	.4214	.4353	.4493	.4631	.4769	.4906	.5042	.5177	.5311	.5443
10	.2959	.3085	.3212	.3341	.3470	.3600	.3731	.3863	.3994	.4126
11	.1942	.2045	.2150	.2257	.2366	.2478	.2591	.2706	.2822	.2940
12	.1193	.1269	.1348	.1429	.1513	.1600	.1689	.1780	.1874	.1970
13	.0687	.0739	.0793	.0850	.0909	.0971	.1035	.1102	.1171	.1242
14	.0372	.0405	.0439	.0476	.0514	.0555	.0597	.0642	.0689	.0739
15	.0190	.0209	.0229	.0251	.0274	.0299	.0325	.0353	.0383	.0415
16	.0092	.0102	.0113	.0125	.0138	.0152	.0168	.0184	.0202	.0220
17	.0042	.0047	.0053	.0059	.0066	.0074	.0082	.0091	.0101	.0111
18	.0018	.0021	.0023	.0027	.0030	.0034	.0038	.0043	.0048	.0053
19	.0008	.0009	.0010	.0011	.0013	.0015	.0017	.0019	.0022	.0024
20	.0003	.0003	.0004	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011
21	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004
22	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
23	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

x'	m 9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000
2	.9989	.9990	.9991	.9991	.9992	.9993	.9993	.9994	.9995	.9995
3	.9942	.9947	.9951	.9955	.9958	.9962	.9965	.9967	.9970	.9972
4	.9802	.9816	.9828	.9840	.9851	.9862	.9871	.9880	.9889	.9897
5	.9483	.9514	.9544	.9571	.9597	.9622	.9645	.9667	.9688	.9707
6	.8902	.8959	.9014	.9065	.9115	.9162	.9207	.9250	.9290	.9329
7	.8022	.8108	.8192	.8273	.8351	.8426	.8498	.8567	.8634	.8699
8	.6877	.6990	.7101	.7208	.7313	.7416	.7515	.7612	.7706	.7798
9	.5574	.5704	.5832	.5958	.6082	.6204	.6324	.6442	.6558	.6672

$$\sum_{x=x'}^{x=\infty} \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

x'	m: 9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
10	.4258	.4389	.4521	.4651	.4782	.4911	.5040	.5168	.5295	.5421
11	.3059	.3180	.3301	.3424	.3547	.3671	.3795	.3920	.4045	.4170
12	.2068	.2168	.2270	.2374	.2480	.2588	.2697	.2807	.2919	.3032
13	.1316	.1393	.1471	.1552	.1636	.1721	.1809	.1899	.1991	.2084
14	.0790	.0844	.0900	.0958	.1019	.1081	.1147	.1214	.1284	.1355
15	.0448	.0483	.0520	.0559	.0600	.0643	.0688	.0735	.0784	.0835
16	.0240	.0262	.0285	.0309	.0335	.0362	.0391	.0421	.0454	.0487
17	.0122	.0135	.0148	.0162	.0177	.0194	.0211	.0230	.0249	.0270
18	.0059	.0066	.0073	.0081	.0089	.0098	.0108	.0119	.0130	.0143
19	.0027	.0031	.0034	.0038	.0043	.0048	.0053	.0059	.0065	.0072
20	.0012	.0014	.0015	.0017	.0020	.0022	.0025	.0028	.0031	.0035
21	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0013	.0014	.0016
22	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0005	.0006	.0007
23	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003
24	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

x'	m: 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	.9998	.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	.9988	.9995	.9998	.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	.9951	.9977	.9990	.9995	.9998	.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	.9849	.9924	.9963	.9982	.9991	.9996	.9998	.9999	1.0000	1.0000
6	.9625	.9797	.9893	.9945	.9972	.9986	.9993	.9997	.9998	.9999
7	.9214	.9542	.9741	.9858	.9924	.9960	.9979	.9990	.9995	.9997
8	.8568	.9105	.9460	.9684	.9820	.9900	.9946	.9971	.9985	.9992
9	.7680	.8450	.9002	.9379	.9626	.9780	.9874	.9929	.9961	.9979
10	.6595	.7576	.8342	.8906	.9301	.9567	.9739	.9846	.9911	.9950
11	.5401	.6528	.7483	.8243	.8815	.9226	.9509	.9696	.9817	.9892
12	.4207	.5384	.6468	.7400	.8152	.8730	.9153	.9451	.9653	.9786
13	.3113	.4240	.5369	.6415	.7324	.8069	.8650	.9083	.9394	.9610
14	.2187	.3185	.4270	.5356	.6368	.7255	.7991	.8574	.9016	.9339
15	.1460	.2280	.3249	.4296	.5343	.6325	.7192	.7919	.8503	.8951
16	.0926	.1556	.2364	.3306	.4319	.5333	.6285	.7133	.7852	.8435
17	.0559	.1013	.1645	.2441	.3359	.4340	.5323	.6250	.7080	.7789
18	.0322	.0630	.1095	.1728	.2511	.3407	.4360	.5314	.6216	.7030
19	.0177	.0374	.0698	.1174	.1805	.2577	.3450	.4378	.5305	.6186
20	.0093	.0213	.0427	.0765	.1248	.1878	.2637	.3491	.4394	.5297
21	.0047	.0116	.0250	.0479	.0830	.1318	.1945	.2693	.3528	.4409
22	.0023	.0061	.0141	.0288	.0531	.0892	.1385	.2009	.2745	.3563
23	.0010	.0030	.0076	.0167	.0327	.0582	.0953	.1449	.2069	.2794
24	.0005	.0015	.0040	.0093	.0195	.0367	.0633	.1011	.1510	.2125
25	.0002	.0007	.0020	.0050	.0112	.0223	.0406	.0683	.1067	.1568
26	.0001	.0003	.0010	.0026	.0062	.0131	.0252	.0446	.0731	.1122
27	.0000	.0001	.0005	.0013	.0033	.0075	.0152	.0282	.0486	.0779
28	.0000	.0001	.0002	.0006	.0017	.0041	.0088	.0173	.0313	.0525
29	.0000	.0000	.0001	.0003	.0009	.0022	.0050	.0103	.0195	.0343
30	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0011	.0027	.0059	.0118	.0218
31	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0014	.0033	.0070	.0135
32	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007	.0018	.0040	.0081
33	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0010	.0022	.0047
34	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0012	.0027
35	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0015
36	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008
37	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004
38	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
39	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
40	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

الجدول 4. توزيع χ^2

تعطى مُدخلات الجدول قيم χ_0^2 من أجل قيم m و ϵ بحيث

$$\int_{\omega=\chi_0^2}^{\omega=\infty} f_m(\omega)\, d\omega = \epsilon$$

حيث $\omega > 0$ $$f_m(\omega) = \left[\frac{\omega^{(m/2)-1}}{2^{m/2}\Gamma(m/2)}\right]\exp\left(-\frac{\omega}{2}\right)$$

درجة الحرية m	ϵ .99	.98	.95	.90	.80	.70	.50
	χ_0^2						
1	0.000	0.001	0.004	0.016	0.064	0.148	0.455
2	0.020	0.040	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.366
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	2.195	3.357
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	9.926	12.340
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721	14.339
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440	17.338
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352	18.338
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266	19.337
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101	21.337
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021	22.337
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792	25.336
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	22.719	26.336
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647	27.336
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577	28.336
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508	29.336

تتمة الجدول 4

درجة الحرية m	.30	.20	.10	ϵ .05	.02	.01	.001
				χ_0^2			
1	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.827
2	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	13.815
3	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345	16.268
4	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277	18.465
5	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086	20.517
6	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812	22.457
7	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	24.322
8	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	26.125
9	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	27.877
10	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	29.588
11	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31.264
12	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217	32.909
13	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688	34.528
14	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141	36.123
15	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578	37.697
16	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000	39.252
17	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409	40.790
18	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805	42.312
19	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191	43.820
20	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566	45.315
21	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932	46.797
22	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289	48.268
23	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638	49.728
24	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980	51.179
25	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314	52.620
26	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642	54.052
27	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963	55.476
28	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278	56.893
29	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588	58.302
30	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892	59.703

الجدول 5. التكاملان الناقصيان التامان K و E

$\sin^{-1}k$	K	E	$\sin^{-1}k$	K	E	$\sin^{-1}k$	K	E
0°	1.5708	1.5708	50°	1.9356	1.3055	81°.0	3.2553	1.0338
1	1.5709	1.5707	51	1.9539	1.2963	81.2	3.2771	1.0326
2	1.5713	1.5703	52	1.9729	1.2870	81.4	3.2995	1.0314
3	1.5719	1.5697	53	1.9927	1.2776	81.6	3.3223	1.0302
4	1.5727	1.5689	54	2.0133	1.2681	81.8	3.3458	1.0290
5	1.5738	1.5678	55	2.0347	1.2587	82.0	3.3699	1.0278
6	1.5751	1.5665	56	2.0571	1.2492	82.2	3.3946	1.0267
7	1.5767	1.5649	57	2.0804	1.2397	82.4	3.4199	1.0256
8	1.5785	1.5632	58	2.1047	1.2301	82.6	3.4460	1.0245
9	1.5805	1.5611	59	2.1300	1.2206	82.8	3.4728	1.0234
10	1.5828	1.5589	60	2.1565	1.2111	83.0	3.5004	1.0223
11	1.5854	1.5564	61	2.1842	1.2015	83.2	3.5288	1.0213
12	1.5882	1.5537	62	2.2132	1.1920	83.4	3.5581	1.0202
13	1.5913	1.5507	63	2.2435	1.1826	83.6	3.5884	1.0192
14	1.5946	1.5476	64	2.2754	1.1732	83.8	3.6196	1.0182
15	1.5981	1.5442	65	2.3088	1.1638	84.0	3.6519	1.0172
16	1.6020	1.5405	65.5	2.3261	1.1592	84.2	3.6852	1.0163
17	1.6061	1.5367	66.0	2.3439	1.1545	84.4	3.7198	1.0153
18	1.6105	1.5326	66.5	2.3622	1.1499	84.6	3.7557	1.0144
19	1.6151	1.5283	67.0	2.3809	1.1453	84.8	3.7930	1.0135
20	1.6200	1.5238	67.5	2.4001	1.1408	85.0	3.8317	1.0127
21	1.6252	1.5191	68.0	2.4198	1.1362	85.2	3.8721	1.0118
22	1.6307	1.5141	68.5	2.4401	1.1317	85.4	3.9142	1.0110
23	1.6365	1.5090	69.0	2.4610	1.1272	85.6	3.9583	1.0102
24	1.6426	1.5037	69.5	2.4825	1.1228	85.8	4.0044	1.0094
25	1.6490	1.4981	70.0	2.5046	1.1184	86.0	4.0528	1.0086
26	1.6557	1.4924	70.5	2.5273	1.1140	86.2	4.1037	1.0079
27	1.6627	1.4864	71.0	2.5507	1.1096	86.4	4.1574	1.0072
28	1.6701	1.4803	71.5	2.5749	1.1053	86.6	4.2142	1.0065
29	1.6777	1.4740	72.0	2.5998	1.1011	86.8	4.2744	1.0059
30	1.6858	1.4675	72.5	2.6256	1.0968	87.0	4.3387	1.0053
31	1.6941	1.4608	73.0	2.6521	1.0927	87.2	4.4073	1.0047
32	1.7028	1.4539	73.5	2.6796	1.0885	87.4	4.4811	1.0041
33	1.7119	1.4469	74.0	2.7081	1.0844	87.6	4.5609	1.0036
34	1.7214	1.4397	74.5	2.7375	1.0804	87.8	4.6477	1.0031
35	1.7312	1.4323	75.0	2.7681	1.0764	88.0	4.7427	1.0026
36	1.7415	1.4248	75.5	2.7998	1.0725	88.2	4.8478	1.0021
37	1.7522	1.4171	76.0	2,8327	1.0686	88.4	4.9654	1.0017
38	1.7633	1.4092	76.5	2.8669	1.0648	88.6	5.0988	1.0014
39	1.7748	1.4013	77.0	2.9026	1.0611	88.8	5.2527	1.0010
40	1.7868	1.3931	77.5	2.9397	1.0574	89.0	5.4349	1.0008
41	1.7992	1.3849	78.0	2.9786	1.0538	89.1	5.5402	1.0006
42	1.8122	1.3765	78.5	3.0192	1.0502	89.2	5.6579	1.0005
43	1.8256	1.3680	79.0	3.0617	1.0468	89.3	5.7914	1.0004
44	1.8396	1.3594	79.5	3.1064	1.0434	89.4	5.9455	1.0003
45	1.8541	1.3506	80.0	3.1534	1.0401	89.5	6.1278	1.0002
46	1.8691	1.3418	80.2	3.1729	1.0388	89.6	6.3509	1.0001
47	1.8848	1.3329	80.4	3.1928	1.0375	89.7	6.6385	1.0001
48	1.9011	1.3238	80.6	3.2132	1.0363	89.8	7.0440	1.0000
49	1.9180	1.3147	80.8	3.2340	1.0350	89.9	7.7371	1.0000

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \qquad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx$$

الجدول 6. التكامل الناقصي غير التام من النوع الأول

$$F(k,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad k = \sin \psi$$

ϕ \ ψ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10°	0.1745	0.1746	0.1746	0.1748	0.1749	0.1751	0.1752	0.1753	0.1754	0.1754
20°	0.3491	0.3493	0.3499	0.3508	0.3520	0.3533	0.3545	0.3555	0.3561	0.3564
30°	0.5236	0.5243	0.5263	0.5294	0.5334	0.5379	0.5422	0.5459	0.5484	0.5493
40°	0.6981	0.6997	0.7043	0.7116	0.7213	0.7323	0.7436	0.7535	0.7604	0.7629
50°	0.8727	0.8756	0.8842	0.8982	0.9173	0.9401	0.9647	0.9876	1.0044	1.0107
60°	1.0472	1.0519	1.0660	1.0896	1.1226	1.1643	1.2126	1.2619	1.3014	1.3170
70°	1.2217	1.2286	1.2495	1.2853	1.3372	1.4068	1.4944	1.5959	1.6918	1.7354
80°	1.3963	1.4056	1.4344	1.4846	1.5597	1.6660	1.8125	2.0119	2.2653	2.4362
90°	1.5708	1.5828	1.6200	1.6858	1.7868	1.9356	2.1565	2.5046	3.1534	∞

الجدول 7. التكامل الناقصي غير التام من النوع الثاني

$$E(k,\phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}\, d\theta, \quad k = \sin \psi$$

ϕ \ ψ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10°	0.1745	0.1745	0.1744	0.1743	0.1742	0.1740	0.1739	0.1738	0.1737	0.1736
20°	0.3491	0.3489	0.3483	0.3473	0.3462	0.3450	0.3438	0.3429	0.3422	0.3420
30°	0.5236	0.5229	0.5209	0.5179	0.5141	0.5100	0.5061	0.5029	0.5007	0.5000
40°	0.6981	0.6966	0.6921	0.6851	0.6763	0.6667	0.6575	0.6497	0.6446	0.6428
50°	0.8727	0.8698	0.8614	0.8483	0.8317	0.8134	0.7954	0.7801	0.7697	0.7660
60°	1.0472	1.0426	1.0290	1.0076	0.9801	0.9493	0.9184	0.8914	0.8728	0.8660
70°	1.2217	1.2149	1.1949	1.1632	1.1221	1.0750	1.0266	0.9830	0.9514	0.9397
80°	1.3963	1.3870	1.3597	1.3161	1.2590	1.1926	1.1225	1.0565	1.0054	0.9848
90°	1.5708	1.5589	1.5238	1.4675	1.3931	1.3055	1.2111	1.1184	1.0401	1.0000

الجدول 8. توابع بِسِل $J_0(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	1.0000	.9975	.9900	.9776	.9604	.9385	.9120	.8812	.8463	.8075
1.	.7652	.7196	.6711	.6201	.5669	.5118	.4554	.3980	.3400	.2818
2.	.2239	.1666	.1104	.0555	.0025	−.0484	−.0968	−.1424	−.1850	−.2243
3.	−.2601	−.2921	−.3202	−.3443	−.3643	−.3801	−.3918	−.3992	−.4026	−.4018
4.	−.3971	−.3887	−.3766	−.3610	−.3423	−.3205	−.2961	−.2693	−.2404	−.2097
5.	−.1776	−.1443	−.1103	−.0758	−.0412	−.0068	.0270	.0599	.0917	.1220
6.	.1506	.1773	.2017	.2238	.2433	.2601	.2740	.2851	.2931	.2981
7.	.3001	.2991	.2951	.2882	.2786	.2663	.2516	.2346	.2154	.1944
8.	.1717	.1475	.1222	.0960	.0692	.0419	.0146	−.0125	−.0392	−.0653
9.	−.0903	−.1142	−.1367	−.1577	−.1768	−.1939	−.2090	−.2218	−.2323	−.2403

الجدول 9. توابع بِسِل $J_1(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	.0000	.0499	.0995	.1483	.1960	.2423	.2867	.3290	.3688	.4059
1.	.4401	.4709	.4983	.5220	.5419	.5579	.5699	.5778	.5815	.5812
2.	.5767	.5683	.5560	.5399	.5202	.4971	.4708	.4416	.4097	.3754
3.	.3391	.3009	.2613	.2207	.1792	.1374	.0955	.0538	.0128	−.0272
4.	−.0660	−.1033	−.1386	−.1719	−.2028	−.2311	−.2566	−.2791	−.2985	−.3147
5.	−.3276	−.3371	−.3432	−.3460	−.3453	−.3414	−.3343	−.3241	−.3110	−.2951
6.	−.2767	−.2559	−.2329	−.2081	−.1816	−.1538	−.1250	−.0953	−.0652	−.0349
7.	−.0047	.0252	.0543	.0826	.1096	.1352	.1592	.1813	.2014	.2192
8.	.2346	.2476	.2580	.2657	.2708	.2731	.2728	.2697	.2641	.2559
9.	.2453	.2324	.2174	.2004	.1816	.1613	.1395	.1166	.0928	.0684

الجدول 10. توابع بِسِل $Y_0(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	$-\infty$	−1.5342	−1.0811	−.8073	−.6060	−.4445	−.3085	−.1907	−.0868	.0056
1.	.0883	.1622	.2281	.2865	.3379	.3824	.4204	.4520	.4774	.4968
2.	.5104	.5183	.5208	.5181	.5104	.4981	.4813	.4605	.4359	.4079
3.	.3769	.3431	.3071	.2691	.2296	.1890	.1477	.1061	.0645	.0234
4.	−.0169	−.0561	−.0938	−.1296	−.1633	−.1947	−.2235	−.2494	−.2723	−.2921
5.	−.3085	−.3216	−.3313	−.3374	−.3402	−.3395	−.3354	−.3282	−.3177	−.3044
6.	−.2882	−.2694	−.2483	−.2251	−.1999	−.1732	−.1452	−.1162	−.0864	−.0563
7.	−.0259	.0042	.0339	.0628	.0907	.1173	.1424	.1658	.1872	.2065
8.	.2235	.2381	.2501	.2595	.2662	.2702	.2715	.2700	.2659	.2592
9.	.2499	.2383	.2245	.2086	.1907	.1712	.1502	.1279	.1045	.0804

الجدول 11. توابع بِسِل $Y_1(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	−∞	−6.4590	−3.3238	−2.2931	−1.7809	−1.4715	−1.2604	−1.1032	−.9781	−.8731
1.	−.7812	−.6981	−.6211	−.5485	−.4791	−.4123	−.3476	−.2847	−.2237	−.1644
2.	−.1070	−.0517	.0015	.0523	.1005	.1459	.1884	.2276	.2635	.2959
3.	.3247	.3496	.3707	.3879	.4010	.4102	.4154	.4167	.4141	.4078
4.	.3979	.3846	.3680	.3484	.3260	.3010	.2737	.2445	.2136	.1812
5.	.1479	.1137	.0792	.0445	.0101	−.0238	−.0568	−.0887	−.1192	−.1481
6.	−.1750	−.1998	−.2223	−.2422	−.2596	−.2741	−.2857	−.2945	−.3002	−.3029
7.	−.3027	−.2995	−.2934	−.2846	−.2731	−.2591	−.2428	−.2243	−.2039	−.1817
8.	−.1581	−.1331	−.1072	−.0806	−.0535	−.0262	.0011	.0280	.0544	.0799
9.	.1043	.1275	.1491	.1691	.1871	.2032	.2171	.2287	.2379	.2447

الجدول 12. الأعداد العشوائية

51772	74640	42331	29044	46621	62898	93582	04186	19640	87056
24033	23491	83587	06568	21960	21387	76105	10863	97453	90581
45939	60173	52078	25424	11645	55870	56974	37428	93507	94271
30586	02133	75797	45406	31041	86707	12973	17169	88116	42187
03585	79353	81938	82322	96799	85659	36081	50884	14070	74950
64937	03355	95863	20790	65304	55189	00745	65253	11822	15804
15630	64759	51135	98527	62586	41889	25439	88036	24034	67283
09448	56301	57683	30277	94623	85418	68829	06652	41982	49159
21631	91157	77331	60710	52290	16835	48653	71590	16159	14676
91097	17480	29414	06829	87843	28195	27279	47152	35683	47280
50532	25496	95652	42457	73547	76552	50020	24819	52984	76168
07136	40876	79971	54195	25708	51817	36732	72484	94923	75936
27989	64728	10744	08396	56242	90985	28868	99431	50995	20507
85184	73949	36601	46253	00477	25234	09908	36574	72139	70185
54398	21154	97810	36764	32869	11785	55261	59009	38714	38723
65544	34371	09591	07839	58892	92843	72828	91341	84821	63886
08263	65952	85762	64236	39238	18776	84303	99247	46149	03229
39817	67906	48236	16057	81812	15815	63700	85915	19219	45943
62257	04077	79443	95203	02479	30763	92486	54083	23631	05825
53298	90276	62545	21944	16530	03878	07516	95715	02526	33537

الجدول 13. تكاملات الجيب وجيب التمام والتكامل الأسي

$$Ei(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du, \quad Si(x) = \int_0^{x} \frac{\sin u}{u}\,du, \quad Ci(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$$

x	$Ei(x)$	$Si(x)$	$Ci(x)$
.0	∞	.0000	∞
.5	.5598	.4931	.1778
1.0	.2194	.9461	−.3374
1.5	.1000	1.3247	−.4704
2.0	.04890	1.6054	−.4230
2.5	.02491	1.7785	−.2859
3.0	.01305	1.8487	−.1196
3.5	$.0^{2}6970$	1.8331	.0321
4.0	$.0^{2}3779$	1.7582	.1410
4.5	$.0^{2}2073$	1.6541	.1935
5.0	$.0^{2}1148$	1.5499	.1900
5.5	$.0^{3}6409$	1.4687	.1421
6.0	$.0^{3}3601$	1.4247	.0681
6.5	$.0^{3}2034$	1.4218	−.0111
7.0	$.0^{3}1155$	1.4546	−.0767
7.5	$.0^{4}6583$	1.5107	−.1156
8.0	$.0^{4}3767$	1.5742	−.1224
8.5	$.0^{4}2162$	1.6296	−.09943
9.0	$.0^{4}1245$	1.6650	−.05535
9.5	$.0^{5}7185$	1.6745	$-.0^{2}2678$
10.0	$.0^{5}4157$	1.6583	.04546

الجدول 14. كثيرات حدود لوجاندر $P_n(x)$

$[P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x]$

x	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$
.00	−.5000	.0000	.3750	.0000
.05	−.4963	−.0747	.3657	.0927
.10	−.4850	−.1475	.3379	.1788
.15	−.4663	−.2166	.2928	.2523
.20	−.4400	−.2800	.2320	.3075
.25	−.4063	−.3359	.1577	.3397
.30	−.3650	−.3825	.0729	.3454
.35	−.3163	−.4178	−.0187	.3225
.40	−.2600	−.4400	−.1130	.2706
.45	−.1963	−.4472	−.2050	.1917
.50	−.1250	−.4375	−.2891	.0898
.55	−.0463	−.4091	−.3590	−.0282
.60	.0400	−.3600	−.4080	−.1526
.65	.1338	−.2884	−.4284	−.2705
.70	.2350	−.1925	−.4121	−.3652
.75	.3438	−.0703	−.3501	−.4164
.80	.4600	.0800	−.2330	−.3995
.85	.5838	.2603	−.0506	−.2857
.90	.7150	.4725	.2079	−.0411
.95	.8538	.7184	.5541	.3727
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

الجدول 15. التابع $\Gamma(x)$ $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,000000	1,25	0,906402	1,50	0,886227	1,75	0,919063
01	0,994326	26	904397	51	886592	76	921375
02	988844	27	902503	52	887039	77	923763
03	983550	28	900718	53	887568	78	926227
04	978438	29	899042	54	888178	79	928767
1,05	0,973504	1,30	0,897471	1,55	0,888868	1,80	0,931384
06	968744	31	896004	56	889639	81	934076
07	964152	32	894640	57	890490	82	936845
08	959725	33	893378	58	891420	83	939690
09	955459	34	892216	59	892428	84	942612
1,10	0,951351	1,35	0,891151	1,60	0,893515	1,85	0,945611
11	947396	36	890185	61	894681	86	948687
12	943590	37	889314	62	895924	87	951840
13	939931	38	888537	63	897244	88	955071
14	936416	39	887854	64	898642	89	958379
1,15	0,933041	1,40	0,887264	1,65	0,900117	1,90	0,961766
16	929803	41	886765	66	901668	91	965231
17	926700	42	886356	67	903296	92	968774
18	923728	43	886036	68	905001	93	972397
19	920885	44	885805	69	906782	94	976099
1,20	0,918169	1,45	0,885661	1,70	0,908639	1,95	0,979881
21	915576	46	885604	71	910572	96	983743
22	913106	47	885633	72	912581	97	987685
23	910755	48	885747	73	914665	98	991708
24	908521	49	885945	74	916826	99	995813
1,25	0,906402	1,50	0,886227	1,75	0,919063	2,00	1,000000

ملاحظة . من أجل قيم x غير الواردة في الجدول ، نستخدم العلاقة

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

المسرد

ملاحظة : العدد الوارد بين قوسين هو رقم الكلمة الانكليزية في المسرد الانكليزي . أما الاعداد التالية فتشير إلى أرقام الصفحات التي وردت فيها الكلمة .

INDEX

ملاحظة : الرقم الوارد بعد الكلمة هو رقم الكلمة العربية في المسرد العربي .

المورد في الرياضيات/فوزي دنان . ـــ دمشق : مؤسسة النوري ،
١٩٩٠ . ـــ ٥٤٢ ص ؛ ٢٠ سم

١ ـــ ٥١١ د ن ا م ٢ ـــ العنوان ٣ ـــ دنان
مكتبة الأسد **مكتبة الأسد**
ع – ١٩٩٠/١٠/٨٦٠

المَطبعَة الجَديدة

المورد في الرياضيات

☆ جميع القوانين والمعادلات الرياضية التي تهم طلاب وخريجي المرحلة الجامعية في جميع الكليات العلمية.. تجدها في هذا الكتاب.

☆ قسم شامل وخاص بالمرحلة الثانوية.

☆ مزوَّد بالشروح والأمثلة والرسوم التوضيحية وبملاحق تسهل استخدامه.

☆ مرجع دائم لا غنى عنه لكل من يستخدم الحساب والهندسة والجبر والإحصاء في حياته العملية.



مُؤَسَسَةُ ٱلنُّوري للطّبَاعَة وَٱلنَّشر وَٱلتَّوزيع